UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ

UPT Universitatea Politehnica Timișoara

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru examenul de admitere din anul 2025 la

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA

EP
Editura POLITEHNICA

Colecţia "LICEU"

CULEGERE
DE PROBLEME
DE MATEMATICĂ

pentru examenul
de admitere din anul 2025 la

UNIVERSITATEA
POLITEHNICA
TIMIŞOARA

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Culegere de probleme de matematică pentru examenul de admitere din anul 2025 la Universitatea Politehnica Timişoara / Doru Păunescu, Romeo Negrea, Liviu Cădariu, ... - Timişoara : Editura Politehnica, 2024
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-35-0624-6

I. Păunescu, Doru
II. Negrea, Romeo
III. Cădariu Liviu

51

DORU PĂUNESCU
LIVIU CĂDARIU
MARIA JIVULESCU
CAMELIA ARIEŞANU
ANANIA GÎRBAN
ADINA JURATONI
CAMELIA PETRIŞOR
NICOLAE LUPA
ROMEO NEGREA
GHEORGHE MOZA
TUDOR BÎNZAR
CRISTIAN LĂZUREANU
OLIVIA BUNDĂU
CIPRIAN HEDREA
ANDREI ECKSTEIN
EMANUEL CISMAŞ

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru examenul de admitere din anul 2025 la

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA

Colecţia "LICEU"

EDITURA POLITEHNICA
TIMIŞOARA - 2024

EDITURA POLITEHNICA
Bd. Republicii nr. 9
300159 Timişoara, România

E-mail: editura@upt.ro
Tel.: 0256.403822

Redactor: Claudia MIHALI

Bun de imprimat: 04.12.2024
Coli de tipar: 24
C.Z.U. 51
ISBN 978-606-35-0624-6

Tiparul executat sub comanda nr. 37
la Tipografia Universităţii Politehnica Timişoara

PREFAŢĂ

Prezenta culegere de probleme de matematică se adresează cu precădere elevilor de liceu care urmează o pregătire sistematică pentru examenul de admitere la o parte din Facultăţile Universităţii Politehnica Timişoara. Cunoscut fiind faptul că una dintre disciplinele fundamentale în pregătirea unui viitor inginer este matematica, rezolvarea problemelor propuse conduce la dezvoltarea competenţelor necesare viitorului student la Politehnică.

Problemele propuse acoperă în mare măsură conţinuturile impuse prin programele analitice de Ministerul Educaţiei Naţionale. În acelaşi timp s-a ţinut cont şi de manualele alternative de matematică utilizate în circuitul liceal.

Deşi problemele propuse sunt de tip grilă cu şase răspunsuri, doar unul fiind corect, o parte din ele urmăresc tipurile de probleme date la probele de matematică ale examenului de Bacalaureat din ultimii ani. Din acest motiv, prezenta culegere poate fi utilizată şi la pregătirea examenului de Bacalaureat sau a unor concursuri şcolare.

Ca structură, cartea are cinci părţi: *Un rezumat al cunoştinţelor dobândite la liceu*, *Probleme de algebră*, *Probleme de trigonometrie şi geometrie plană*, *Probleme de analiză matematică*, respectiv *Subiectele date la admitere în anii 2014 – 2024 cu rezolvările integrale.*

Rezumatul cunoştinţelor dobândite în liceu e necesar absolvenţilor care vin din diverse licee cu pregătire matematică inegală. Mai mult, acest rezumat se va dovedi util studenţiilor din anul întâi care vor avea astfel un punct de referinţă pentru valoarea adăugată de cursurile universitare. Problemele propriu zise se regăsesc în părţile doi, trei şi patru ale volumului.

Autorii

Cuprins

UN REZUMAT AL CUNOŞTINŢELOR DOBÂNDITE LA LICEU

ALGEBRĂ

TRIGONOMETRIE ŞI GEOMETRIE

ANALIZĂ MATEMATICĂ

ALGEBRĂ

Formule de calcul prescurtat

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^2+b^2 \text{ nu se poate descompune în } \mathbb{R}$$

$$a^2+b^2 = (a-ib)(a+ib) \text{ în } \mathbb{C}$$

$$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\\a^3-b^3 &= (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\end{aligned}$$

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$a^n-b^n=(a-b)\underbrace{\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}_{n \text{ termeni}}$$

$$a^{2p+1}+b^{2p+1}=(a+b)\underbrace{\left(a^{2p}-a^{2p-1}b+\cdots-ab^{2p-1}+b^{2p}\right)}_{2p+1 \text{ termeni}}$$

Progresii aritmetice şi progresii geometrice

	Progresia aritmetică	Progresia geometrică
	$\div\ a_1,a_2,...,a_n,...$	$\div\div\ b_1,b_2,...,b_n,...$
Term. gen.	$a_n=a_1+r\cdot(n-1)\quad(r\neq 0)$	$b_n=b_1\cdot q^{n-1}\quad(q\neq 0;1)$
Raţia	$r=a_{k+1}-a_k$	$q=\dfrac{b_{k+1}}{b_k}\quad(b_k\neq 0)$
Suma	$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$	$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$
	$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}\quad(S_1=a_1)$	$S_n=b_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}\quad(S_1=b_1)$
	$a_k=\dfrac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$	$b_k=\sqrt{b_{k-1}\cdot b_{k+1}}\quad(b_1,q>0)$

Funcţii

Fie A şi B două mulţimi nevide; se numeşte *funcţie* definită pe A cu valori în B orice lege de corespondenţă (relaţie) care asociază fiecărui element $x \in A$ un unic element $y \in B$.

Notaţia "$f : A \to B,\ y = f(x)$" se citeşte "funcţia f definită pe A cu valori în B de relaţia $y = f(x)$".

Mulţimea A este domeniul de definiţie al funcţiei f, iar mulţimea B reprezintă domeniul de valori sau codomeniul acesteia.

Mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ poartă numele de *grafic* al funcţiei.

Funcţii bijective

Funcţia $f : A \to B$ este *injectivă* dacă şi numai dacă (prescurtat d.d.) este îndeplinită următoarea proprietate:

$$(\forall)\, x_1, x_2 \in A \text{ din } x_1 \neq x_2 \ \text{ rezultă } \ f(x_1) \neq f(x_2)\,.$$

În practică, pentru dovedirea injectivităţii, acestă formă a definiţiei poate fi dificil de utilizat. Este preferată formularea (logic echivalentă)

$$(\forall)\, x_1, x_2 \in A \text{ din } f(x_1) = f(x_2) \ \text{ rezultă } \ x_1 = x_2.$$

Dacă există cel puţin o pereche de elemente x_1, x_2 din domeniul de definiţie A cu $x_1 \neq x_2$ şi $f(x_1) = f(x_2)$, atunci funcţia f nu este injectivă.

Interpretarea geometrică a injectivităţii pentru funcţii reale ($B \subseteq \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subseteq \mathbb{R}$) este sugestivă:

$f : A \to B$ este injectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$ intersectează graficul funcţiei f în cel mult un punct.

Imaginea funcţiei $f : A \to B$ este submulţimea domeniului de valori B alcătuită din toate elementele de forma $y = f(x)$:

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in B \mid\ (\exists)\, x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\}\,.$$

Funcţia $f : A \to B$ este *surjectivă* dacă şi numai dacă $\operatorname{Im}(f) = B$ sau, altfel spus,

$$(\forall)\, y \in B \ \text{ ecuaţia } \ y = f(x) \ \text{ are cel puţin o soluţie } x \in A.$$

Interpretarea geometrică a surjectivităţii pentru funcţii reale ($B \subseteq \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subseteq \mathbb{R}$) :

$f : A \to B$ este surjectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$ intersectează graficul funcţiei f în cel puţin un punct.

Funcţia $f : A \to B$ este *bijectivă* d.d. f este injectivă şi surjectivă.

Interpretarea geometrică a bijectivităţii pentru funcţii reale ($B \subseteq \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subseteq \mathbb{R}$) :

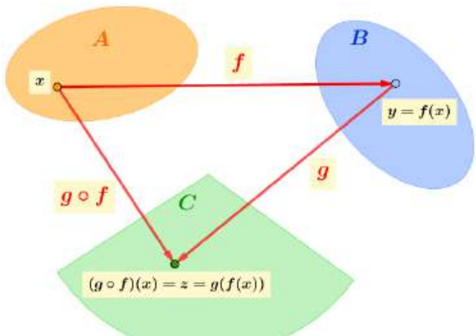
$f : A \to B$ este bijectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$ intersectează graficul funcţiei f într-un singur punct.

Compunerea funcţiilor

Fie funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ definite prin relaţiile $y = f(x)$, respectiv $z = g(y)$. Funcţia ce asociază fiecărui element x din mulţimea A elementul $z = g(f(x))$ din mulţimea C se numeşte *funcţie compusă* şi se notează prin $g \circ f$. Mai precis, $g \circ f : A \to C$ este definită prin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Evident, ordinea în care se efectuează operaţia de compunere nu este aleatoare, ci este bine determinată: domeniul de definiţie al funcţiei g (pe prima poziţie în expresia $g \circ f$) trebuie să coincidă cu domeniul de valori al funcţiei f (situată pe poziţia secundă).



Funcţii inversabile

Funcţia $f : A \to B$ este *inversabilă* dacă există o funcţie $f^{-1} : B \to A$ ce verifică relaţiile

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \qquad (y \in B) \quad \text{şi} \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \qquad (x \in A).$$

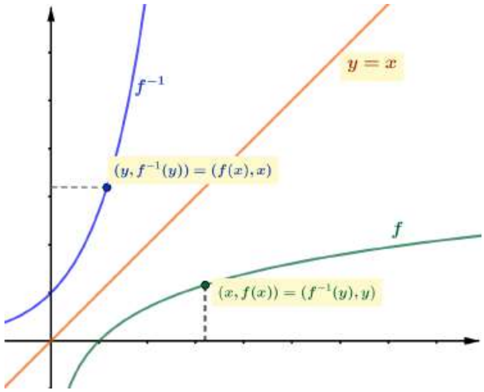
Funcţia $f^{-1} : B \to A$, $x = f^{-1}(y)$ se numeşte *inversa* funcţiei $f : A \to B$, $y = f(x)$.

Teoremă

Funcţia $f : A \to B$ este inversabilă d.d. este bijectivă.

Interpretarea geometrică a inversabilităţii pentru funcţii reale:
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ este inversabilă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$, intersectează graficul funcţiei f într-un singur punct.

Graficele funcţiei f şi a funcţiei inverse f^{-1}, reprezentate în acelaşi sistem de axe, sunt simetrice faţă de prima bisectoare.



Principiul inducţiei matematice

Problemă

Să se arate că propoziţia $\mathbf{P}(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0 \quad (n_0, n \in \mathbb{N})$.

Etapa I VERIFICAREA

Se dovedeşte că $\mathbf{P}(n_0)$ este adevărată.

Etapa a-II-a PASUL INDUCTIV

Presupunem că $\mathbf{P}(k)$ este adevărată.
Demonstrăm, utilizând presupunerea, că $\mathbf{P}(k+1)$ este adevărată.

În final, $\mathbf{P}(n_0)$ fiind adevărată (fapt verificat la etapa I), rezultă că $\mathbf{P}(n_0+1)$ este de asemenea adevărată (consecinţă a pasului inductiv). Mai departe, conform pasului inductiv, şi propoziţia $\mathbf{P}(n_0+2)$ este adevărată şi aşa mai departe, $\mathbf{P}(n)$ este adevărată pentru orice $n = n_0 + m,\ m \in \mathbb{N}$.

Sume remarcabile (1)

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2$$

Permutări, aranjamente, combinări

O mulţime finită se numeşte mulţime ordonată dacă există o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale. Altfel spus, spre deosebire de mulţime, unde nu contează ordinea elementelor, orice aranjare a elementelor în altă ordine creează o nouă mulţime ordonată.

$P_n =$"numărul mulţimilor ordonate de n elemente distincte ce se pot forma cu cele n elemente date."

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Prin convenţie: $0! = 1$

$$n! = (n-1)! \cdot n \qquad\qquad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

$A_n^m =$"numărul mulţimilor ordonate de m elemente distincte ce se pot forma cu cele n elemente date, $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$."

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_n^0 = 1 \ ; \ A_n^1 = n \ ; \ A_n^n = n! \ .$$

$C_n^m =$"numărul submulţimilor de m elemente ce se pot forma cu cele n elemente date, $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$."

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \ ; \ C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} \ ;$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \ .$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \ ; \ C_n^1 = C_n^{n-1} = n \ ;$$

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \ ; \ C_n^k = C_n^{n-k}$$

(formula combinărilor complementare).

$$k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1} \ ; \ C_n^k = \frac{k+1}{n-k} \cdot C_n^{k+1} \ ;$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k .$$

Triunghiul lui Pascal (calculul rapid al tuturor combinărilor $C_n^{\cdot}$)

$$
\begin{array}{lccccccccccccccl}
n=1 & & & & & & 1\searrow & & \swarrow 1 & & & & & & & C_1^{\cdot} \\
n=2 & & & & & 1\searrow & & \swarrow 2 \searrow & & \swarrow 1 & & & & & & C_2^{\cdot} \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & C_3^{\cdot} \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & C_4^{\cdot} \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & C_5^{\cdot} \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & C_6^{\cdot}
\end{array}
$$

Binomul lui Newton

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k \\
&= C_n^0 \cdot x^n \cdot y^0 + C_n^1 \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + C_n^2 \cdot x^{n-2} \cdot y^2 + \cdots + C_n^n \cdot x^0 \cdot y^n
\end{aligned}
$$

Suma conţine $n+1$ termeni, termenul general al dezvoltării (cel de-al $k+1$-lea termen din dezvoltare) fiind dat de

$$T_{k+1} \quad = \quad C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k,$$

unde C_n^k se numeşte coeficientul binomial al termenului T_{k+1}.

Sume remarcabile (2)

Suma coeficienţilor binomiali:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n \quad = \quad 2^n,$$

de unde rezultă că numărul submulţimilor unei mulţimi finite cu n elemente este 2^n.

$$
\begin{aligned}
C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \cdots &= 0 \\
C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots &= 2^{n-1} \\
C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots &= 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

Funcţii cu domeniul şi codomeniul mulţimi finite

Fie $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ şi $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ două mulţimi cu m şi respectiv n elemente (distincte), iar $f : X \to Y$ o funcţie arbitrară.

a) Numărul funcţiilor $f : X \to Y$ este n^m.

b) Dacă $m \leq n$, atunci numărul funcţiilor injective $f : X \to Y$ este A_n^m.
Dacă $m > n$, atunci nu pot exista funcţii injective $f : X \to Y$.

c) Dacă $f : X \to Y$ este bijectivă, atunci $m = n$.
Dacă $m = n$ şi $f : X \to Y$ este injectivă, atunci $f : X \to Y$ este bijectivă.
Dacă $m = n$ şi $f : X \to Y$ este surjectivă, atunci $f : X \to Y$ este bijectivă.

Numărul funcţiilor bijective $f : X \to Y$ este $P_n = n!$.

În particular, o funcţie bijectivă $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ se numeşte *permutare* de gradul n. Mulţimea tuturor permutărilor de gradul n se notează S_n şi conţine $n!$ elemente.

Dacă i şi j sunt elemente distincte din $\{1, 2, \ldots, n\}$, atunci permutarea τ_{ij} definită prin $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$ şi $\tau_{ij}(k) = k$ pentru $k \neq i, j$ se numeşte *transpoziţie*. Numărul tuturor transpoziţiilor de ordinul n este $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ şi coincide cu numărul perechilor ordonate (i, j), cu $i < j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Orice permutare σ de ordin n cu $n \geq 2$ se poate reprezenta ca produs de transpoziţii.

Fie i şi j elemente distincte din $\{1, 2, \ldots, n\}$; perechea ordonată (i, j) cu $i < j$ se numeşte *inversiune* a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Numărul tuturor inversiunilor permutării σ se notează $inv(\sigma)$, iar $sign(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}$ se numeşte *signatura* (*semnul*) permutării.

Permutarea σ este pară, respectiv impară, după cum signatura sa $sign(\sigma)$ este $+1$ sau -1. În particular, orice transpoziţie este o permutare impară.

Funcţia de gradul întâi

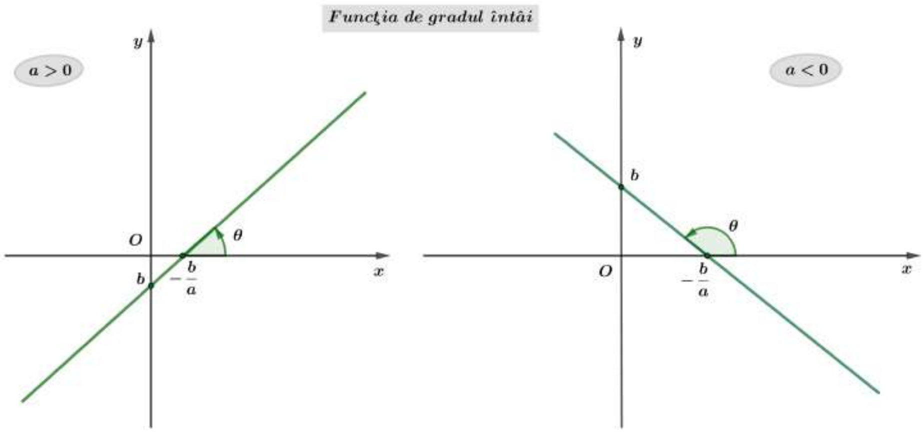
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\quad b \in \mathbb{R})$$

Graficul funcţiei de gradul întâi este dreapta $y = ax + b$ ce taie axele de coordonate în punctele $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ şi $(0, b)$.

Soluţia ecuaţiei de gradul întâi $ax + b = 0$ este abscisa punctului în care graficul funcţiei intersectează axa $Ox : x = -\dfrac{b}{a}$.

Numărul a, coeficientul director al funcţiei de gradul întâi, este panta dreptei $y = ax + b$ şi reprezintă tangenta unghiului θ pe care dreapta îl face cu semiaxa pozitivă Ox, măsurat în sens direct trigonometric: $a = \operatorname{tg}\theta$.

Semnul coeficientului director a determină monotonia funcţiei.



Dacă $a < 0$, funcţia f este strict descrescătoare: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Dacă $a > 0$, funcţia f este strict crescătoare: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Semnul funcţiei de gradul întâi este constant pe intervalele $\left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right)$ şi $\left(-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$; practic, semnul funcţiei este determinat de semnul coeficientului director a.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Funcţia de gradul al doilea

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b, c \in \mathbb{R})$$

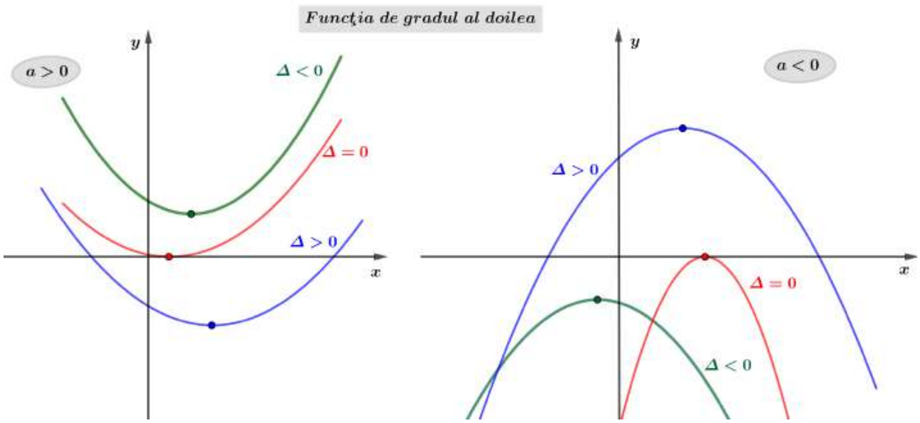
Forma canonică a expresiei de gradul al doilea se obţine prin izolarea variabilei x într-un pătrat perfect:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}, \quad \text{unde} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Graficul funcţiei de gradul al doilea este o parabolă având vârful în punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ şi axa de simetrie $x = -\frac{b}{2a}$, paralelă cu Oy. Parabola intersectează axa Oy în punctul $(0, c)$.

Dacă $a > 0$, vârful V este punct de *minim al graficului funcţiei*, iar dacă $a < 0$, atunci vârful V este punct de *maxim al graficului funcţiei.*

Intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc *intervale de monotonie* ale funcţiei de gradul al doilea.



Intersecţia cu axa Ox depinde însă de natura soluţiilor ecuaţiei de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$:

i) Dacă $\Delta < 0$, atunci ecuaţia *nu are soluţii reale*, iar parabola (graficul funcţiei de gradul al doilea) nu intersectează axa Ox.

ii) Dacă $\Delta = 0$, atunci ecuaţia *are o singură soluţie reală* (dublă) $x = -\frac{b}{2a}$, iar parabola este tangentă axei Ox.

iii) Dacă $\Delta > 0$, atunci $ax^2 + bx + c$ se descompune[1] după cum urmează:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)} \quad \text{unde} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a};$$

ecuaţia *are două soluţii reale distincte*, x_1 şi x_2, abscisele punctelor în care parabola intersectează axa Ox.

[1]Formula de descompunere rămâne valabilă chiar dacă $\Delta < 0$; în acest caz $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-(-\Delta)} = i\sqrt{-\Delta}$ iar soluţiile $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sunt numere complexe.

Semnul funcţiei de gradul al doilea este determinat de poziţia graficului (a parabolei) faţă de axa Ox. Cele şase situaţii descrise mai sus evidenţiază rolul coeficientului director a şi al discriminantului Δ în studiul semnului. Practic, funcţia de gradul al doilea are semnul coeficientului director a cu o singură excepţie: dacă discriminantul Δ este strict pozitiv; în acest caz, *pe intervalul situat între soluţii, funcţia are semn contrar lui a.*

i) Dacă $\Delta < 0$, atunci funcţia de gradul al doilea are acelaşi semn pe întreaga axă reală:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		semnul lui a	

ii) Dacă $\Delta = 0$, atunci funcţia de gradul al doilea are acelaşi semn pe întreaga axă reală cu excepţia unui singur punct, în care se anulează:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c		semnul lui a	0	semnul lui a	

iii) Dacă $\Delta > 0$, atunci funcţia de gradul al doilea îşi schimbă semnul la trecerea prin soluţii:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Relaţiile lui Viète evidenţiază legăturile ce există între coeficienţii şi soluţiile ecuaţiei de gradul al doilea, indiferent dacă acestea sunt reale sau complexe:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$P = x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

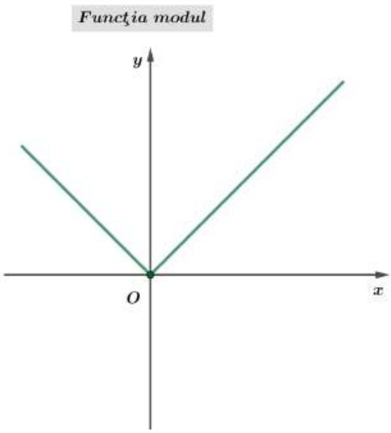
Cu ajutorul sumei $S = x_1 + x_2$ şi a produsului $P = x_1x_2$ putem construi întotdeauna ecuaţia de gradul al doilea cu soluţiile date x_1 şi x_2 :

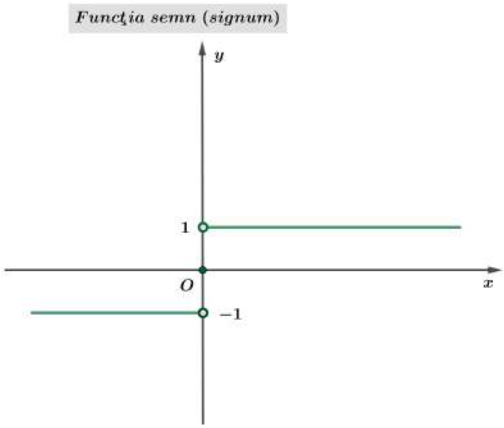
$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Funcţiile modul şi signum

$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \ x \geq 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$$

$$sign \ : \ \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}, \quad sign(x) = \begin{cases} 1 & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ -1 & , \ x < 0 \end{cases}$$





Proprietăţile modulului

i) $|x| \geq 0$ şi $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (modulul este pozitiv definit)

ii) $\dfrac{|x|}{x} = sign(x)$ $(x \neq 0)$

iii) $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$ (modulul este multiplicativ)

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inegalitatea triunghiului)

iv) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

Funcţia modul este *continuă* în origine *fără a fi însă derivabilă* în acest punct:

$$f'_s(0) = -1, \quad f'_d(0) = 1.$$

Funcţia semn este *discontinuă* în origine; $x = 0$ este punct de discontinuitate de speţa întâi:

$$f(0-0) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(0+0) = 1.$$

Funcţia parte întreagă

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = [x]$$

$[x]$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x

Proprietăţile părţii întregi

i) $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$

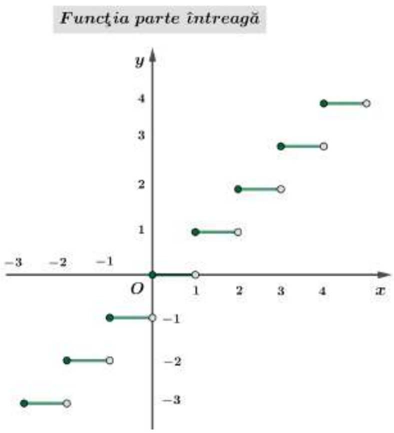
ii) $[x + n] = n + [x] \qquad (n \in \mathbb{Z})$

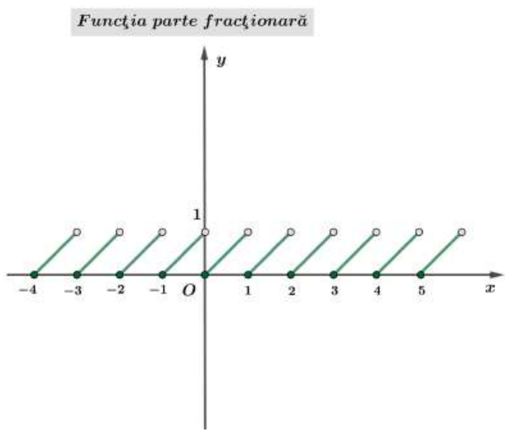
Funcţia parte întreagă este discontinuă în fiecare punct de abscisă întreagă:

$$f(n - 0) = n - 1 \text{ şi } f(n) = f(n + 0) = n$$

Punctele de abscisă întregă sunt discontinuităţi de speţa întâi.

Funcţia parte întreagă este continuă la dreapta în fiecare punct de abscisă întreagă.





Funcţia parte fracţionară

$$f : \mathbb{R} \to [0, 1), \quad f(x) = \{x\}$$

$\{x\} = x - [x]$ este partea fracţionară a lui x

Funcţia parte fracţionară este periodică cu perioada principală $T = 1$:

$$\{x + k\} = \{x\} \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}, \ (\forall)\, k \in \mathbb{Z}$$

Funcţia parte fracţionară este discontinuă în fiecare punct de abscisă întreagă:

$$f(n-0) = 1 \quad \text{şi} \quad f(n) = f(n+0) = 0$$

Puteri şi radicali

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = x^k \qquad\quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \qquad f(x) = \sqrt[2n]{x} \qquad\quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Rădăcina de ordinul $k = 2n$ *a numărului pozitiv* a este unica soluţie pozitivă a ecuaţiei $z^{2n} = a$ şi se notează prin $\sqrt[2n]{a}$.

Conform acestei definiţii, pentru numerele pozitive a şi z, are loc echivalenţa

$$\sqrt[2n]{a} = z \iff z^{2n} = a.$$

Convenim să notăm rădăcina pătrată (rădăcina de ordinul al doilea) simplu prin $\sqrt{\ }$ în loc de $\sqrt[2]{\ }$.

Observaţie

Rădăcina de ordinul doi a numărului 4 este 2, deoarece doar una din rădăcinile ecuaţiei

$$z^2 = 4 \iff z_{1,2} = \pm 2$$

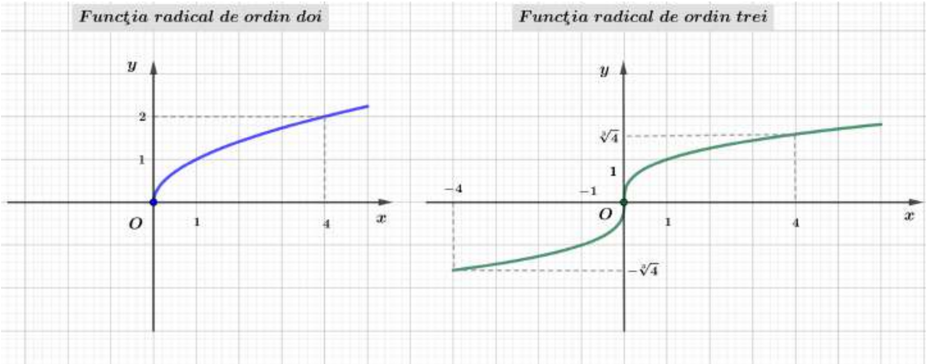
este pozitivă; prin urmare $\sqrt{4} = +2$. Exprimarea $\sqrt{4} = \pm 2$ este greşită în contextul extragerii rădăcinii reale.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[2n+1]{x} \qquad\quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Rădăcina de ordinul $k = 2n+1$ *a numărului real* a este unica soluţie reală a ecuaţiei $z^k = a$ şi se notează prin $\sqrt[2n+1]{a}$:

$$\sqrt[2n+1]{a} = z \iff z^{2n+1} = a.$$

Definiţia rădăcinii de ordinul k poate fi extinsă şi în cazul numerelor negative dacă indicele k este impar, $k = 2n+1 \ \ (n \in \mathbb{N}^*)$.



Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este tangentă vericală la graficul funcţiei radical. Originea $O\,(0,0)$ este punct de inflexiune cu tangenta verticală la graficul funcţiei radical de ordin impar.

Proprietăţile puterilor şi radicalilor

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{de\ "n"\ \ ori} \qquad (n \in \mathbb{N}^* \ , \quad a \in \mathbb{R})$$

$$a^0 = 1 \quad (a \in \mathbb{R}^*)$$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k} \qquad (k \in \mathbb{Z} \ , \quad a \in \mathbb{R}^*)$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad (p \in \mathbb{Z}^* \ , \quad q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \ , \quad a \in \mathbb{R}_+^* \ )$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad , \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^k} \quad , \quad \sqrt[n]{a^{n \cdot m}} = a^m,$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad , \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

Funcţia exponenţială

$$f : \mathbb{R} \to (0,\infty)\,, \ \ f\,(x) = a^x \qquad \big(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)\big)$$

Funcţia exponenţială cu *baza supraunitară* este *strict crescătoare*:

$$\text{pentru } a \in (1,\infty) : \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2} \ .$$

În plus, au loc relaţiile:

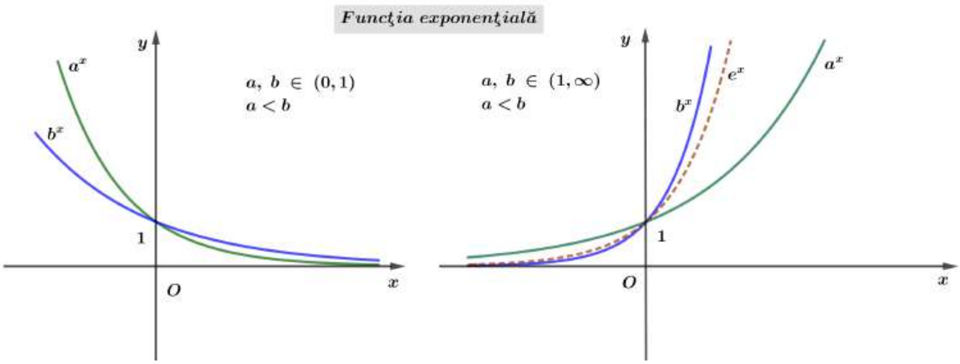
$$\begin{aligned} x &< 0 \text{ şi } 1 < a < b \quad \Rightarrow \quad a^x > b^x \\ x &> 0 \text{ şi } 1 < a < b \quad \Rightarrow \quad a^x < b^x \ . \end{aligned}$$

Funcţia exponenţială cu *baza subunitară* este *strict descrescătoare*:

$$\text{pentru } a \in (0,1) : \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad a^{x_1} > a^{x_2} \ .$$

În plus, au loc relaţiile:

$$\begin{aligned} x &< 0 \text{ şi } 0 < a < b < 1 \quad \Rightarrow \quad a^x > b^x \\ x &> 0 \text{ şi } 0 < a < b < 1 \quad \Rightarrow \quad a^x < b^x \ . \end{aligned}$$



Proprietăţile funcţiei exponenţiale

(i) Proprietăţi de calcul

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \quad ; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \\ (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad ; \\ (a^x)^y &= a^{x \cdot y} \quad ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad . \end{aligned}$$

(ii) Funcţia exponenţială este *bijectivă* deoarece este injectivă, adică

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad a^{x_1} \neq a^{x_2} \quad (\text{echivalent } a^{x_1} = a^{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2),$$

şi surjectivă, adică

$$(\forall)\, y \in (0, +\infty) \qquad (\exists)\, x \in \mathbb{R} \quad \text{a.î.} \quad y = a^x.$$

Prin urmare funcţia exponenţială este *inversabilă*, iar *inversa* ei este funcţia logaritmică cu aceeaşi bază (vezi paragraful ce urmează).

(iii) Dreapta $y = 0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală la graficul funcţiei exponenţiale. În cazul funcţiei exponenţiale cu baza $e = 2,\, 718\,281\,...$, limitele la extremităţi sunt

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

Funcţia logaritmică

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \log_a x \qquad \left(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1, \infty)\right)$$

Logaritmul unui număr pozitiv x calculat în baza a $\left(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\right)$ se notează $\log_a x$ şi reprezintă puterea la care trebuie ridicată baza a pentru a obţine x.

Conform acestei definiţii, pentru numerele strict pozitive x şi a, $a \neq 1$, are loc echivalenţa

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x.$$

Logaritmii cel mai des întâlniţi în practică sunt *logaritmul zecimal* ($\log_{10}$) pentru calcule numerice şi *logaritmul natural* ($\log_e$), cu baza $e = 2,\, 718\,281\,...$, la capitolul de Analiză matematică. Pentru simplitatea scrierii se utilizează notaţiile

$$\log_{10} x = \lg x \quad \text{şi} \quad \log_e x = \ln x\ .$$

Funcţia logaritmică cu *baza supraunitară* este *strict crescătoare*:

$$\text{pentru } a \in (1, \infty): \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \log_a x_1 < \log_a x_2\ .$$

În plus, au loc relaţiile:

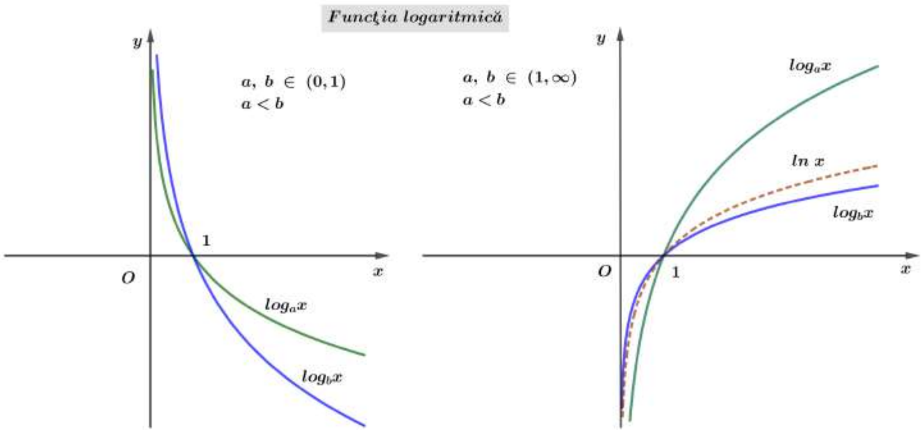
$$0 < x < 1 \;\; \text{şi} \;\; 1 < a < b \quad \Rightarrow \quad \log_a x < \log_b x$$
$$x > 1 \;\; \text{şi} \;\; 1 < a < b \quad \Rightarrow \quad \log_a x > \log_b x\ .$$

Funcţia logaritmică cu *baza subunitară* este *strict descrescătoare*:

$$\text{pentru } a \in (0,1): \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \ .$$

În plus, au loc relaţiile:

$$0 < x < 1 \ \text{ şi } \ 0 < a < b < 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a x < \log_b x$$
$$x > 1 \ \text{ şi } \ 0 < a < b < 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a x > \log_b x \ .$$



Proprietăţile funcţiei logaritmice

(i) Proprietăţi de calcul

$$\begin{array}{lcll}
\log_a(xy) & = & \log_a x + \log_a y \ ; & \log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \ ; \\
\log_a 1 & = & 0 \ ; & \log_a a = 1 \ ; \\
\log_a(x^r) & = & r \log_a x \ ; & \log_{a^r} x = \dfrac{1}{r} \log_a x \ ; \\
\log_a \sqrt[n]{x} & = & \dfrac{1}{n} \log_a x \ ; & \log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x \ .
\end{array}$$

(ii) Funcţia logaritmică este *bijectivă* deoarece este injectivă,

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2$ (echivalent $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$),

şi surjectivă,

$$(\forall)\, y \in \mathbb{R} \qquad (\exists)\, x \in (0, +\infty) \quad \text{a.î.} \quad y = \log_a x.$$

Prin urmare funcţia logaritmică este *inversabilă*, iar *inversa* ei este funcţia exponenţială cu aceeaşi bază.

$$\begin{array}{rcll} a^{\log_a x} & = & x & (\forall)\, x \in (0,+\infty) \\ \log_a(a^y) & = & y & (\forall)\, y \in \mathbb{R} \end{array}$$

Graficele celor două funcţii sunt simetrice faţă de prima bisectoare.

(iii) Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală la graficul funcţiei logaritmice. În cazul logaritmului natural, limitele la extremităţi sunt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

(iv) Formulele de schimbare a bazei logaritmilor

$$\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b \;\; ; \;\; \log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a} \;\; ;$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Polinoame şi ecuaţii algebrice

Împărţirea polinoamelor. Divizibilitate.

$f, g \in \mathbb{C}[X]$ polinoame având gradele $n = \text{grad}\,(f)$ şi respectiv $m = \text{grad}\,(g)$

$$n \geq m \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} f : g = c \text{ rest } r \quad \text{unde} \quad \text{grad}\,(r) < m \\ \text{grad}\,(c) = n - m \end{array}$$

Teorema împărţirii cu rest

$$f : g = c \text{ rest } r \quad \text{d.d.} \quad f = g \cdot c + r \qquad \text{(proba împărţirii)}$$

Polinomul f este *divizibil* prin g dacă şi numai dacă $r \equiv 0$ (citeşte: r este polinomul identic nul sau, mai precis, coeficienţii restului r sunt toţi nuli). Polinoamele f şi g sunt *prime între ele* dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1 (se notează: $(f, g) = 1$).

Teorema lui Bézout

Restul împărţirii lui f prin $(x-a)$ este $r = f\,(a)$.

Dacă $f(a) = 0$, atunci a se numeşte *rădăcină* a polinomului f.

Consecinţe

a) f este divizibil prin $(x-a) \Longleftrightarrow f(a) = 0$

b) f este divizibil prin $g \Longleftrightarrow$ *toate* rădăcinile lui g sunt rădăcini (cu multiplicităţi identice) pentru f.

Teorema fundamentală a algebrei

Orice polinom cu coeficienţi complecşi are cel puţin o rădăcină complexă.

Consecinţă

Orice polinom $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{C}[X], a_0 \neq 0$, are exact n rădăcini complexe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (distincte sau nu) şi prin urmare se descompune în factori primi de gradul întâi:

$$f = a_0(X-x_1)^{n_1} \cdot (X-x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (X-x_k)^{n_k}$$

unde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ reprezintă multiplicităţile rădăcinilor distincte $x_1, x_2, \ldots, x_k$, cu $k \leq n$.

Relaţiile lui Viète

$gr\,(f) = 2 \quad \Rightarrow \quad f = a_0X^2 + a_1X + a_2, a_0 \neq 0,$

$f = a_0(X-x_1)(X-x_2) = a_0X^2 - a_0(x_1+x_2)X + a_0x_1x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 & = & -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1\,x_2 & = & \dfrac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

$gr\,(f) = 3 \quad \Rightarrow \quad f = a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3, a_0 \neq 0,$

$$f = a_0(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$
$$= a_0X^3 - a_0(x_1 + x_2 + x_3)X^2 + a_0\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right)X - a_0x_1x_2x_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1\,x_2 + x_2\,x_3 + x_3\,x_1 & = & \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1\,x_2\,x_3 & = & -\dfrac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

$gr\,(f) = 4 \quad \Rightarrow \quad f = a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4, a_0 \neq 0,$

$$f = a_0(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$$
$$= a_0X^4 - a_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)X^3 + a_0(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 & = & \dfrac{a_2}{a_0} & \heartsuit \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 & = & -\dfrac{a_3}{a_0} & \diamondsuit \\ x_1x_2x_3x_4 & = & \dfrac{a_4}{a_0} \end{cases}$$

$\heartsuit$ se scrie mai convenabil: $\quad x_1\,x_2 + x_3\,x_4 + (x_1 + x_2)\,(x_3 + x_4) = \dfrac{a_2}{a_0}$

$\diamondsuit$ se scrie mai convenabil: $\quad x_1\,x_2\,(x_3 + x_4) + x_3\,x_4\,(x_1 + x_2) = -\dfrac{a_3}{a_0}$

Tipuri speciale de ecuaţii de grad superior

a) Ecuaţii binome

$$x^n - a = 0$$

- se scrie a sub formă trigonometrică: $\quad a = r(\cos t + i \sin t)$
- se extrage rădăcina complexă de ordinul n:

$$x_k \in \left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n} \right) \mid k \in \{0, 1, 2, ..., (n - 1)\} \right\}$$

b) Ecuaţii bipătrate şi tripătrate

$x^4 + a\,x^2 + b = 0$ substituţia $x^2 = y$

$x^6 + a\,x^3 + b = 0$ substituţia $x^3 = y$

c) Ecuaţii reciproce

• Ecuaţia reciprocă de gradul 3

$$a\,x^3 + b\,x^2 + b\,x + a = 0$$

admite soluţia $x_1 = -1$.
Se aplică schema lui Horner şi se obţine o ecuaţie de gradul doi.

• Ecuaţia reciprocă de gradul 4

$$a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + b\,x + a = 0$$

Prin împărţirea cu x^2 rezultă $a\,x^2 + b\,x + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$, echivalent, după gruparea termenilor

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Se face substituţia $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.
Se rezolvă ecuaţia redusă: $a\,(t^2 - 2) + bt + c = 0$.
Se revine la variabila x rezolvând ecuaţiile de gradul al doilea: $x + \dfrac{1}{x} = t_1$ şi $x + \dfrac{1}{x} = t_2$.

• Ecuaţia reciprocă de gradul 5

$$a\,x^5 + b\,x^4 + c\,x^3 + c\,x^2 + b\,x + a = 0$$

admite soluţia $x = -1$.
Se aplică schema lui Horner şi se obţine o ecuaţie reciprocă de gradul 4:

	a	b	c	c	b	a
-1	a	$b-a$	$-b+a+c$	$b-a$	a	0

$$a\,x^4 + (b-a)\,x^3 + (a-b+c)\,x^2 + (b-a)\,x + a = 0$$

d) Ecuaţii cu coeficienţi întregi

$f = 0 \qquad f \in \mathbb{Z}[X]$

$a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$

Rădăcinile întregi ale lui f se află printre divizorii termenului liber a_n.
Rădăcinile raţionale se află printre fracţiile $\dfrac{p}{q}$, unde

p este divizor al termenului liber a_n
q este divizor al coeficientului director a_0

e) Ecuaţii cu coeficienţi raţionali

$f = 0 \qquad f \in \mathbb{Q}[X]$

$a + b\sqrt{q} \qquad (a, b \in \mathbb{Q},\ b \neq 0,\ q$ nu este pătrat perfect$)$

Dacă $x_1 = a + b\sqrt{q}$ este rădăcină pentru f, atunci $x_2 = a - b\sqrt{q}$ este de asemenea rădăcină pentru f, caz în care f este divizibil prin

$$(X - a - b\sqrt{q})\,(X - a + b\sqrt{q}) = (X - a)^2 - b^2 q.$$

f) Ecuaţii cu coeficienţi reali

$f = 0 \qquad f \in \mathbb{R}[X]$

$a + i\,b \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0)$

Dacă $x_1 = a + i\,b$ este rădăcină pentru f, atunci $x_2 = a - i\,b$ este de asemenea rădăcină pentru f, caz în care f este divizibil prin

$$(X - a - i\,b)\,(X - a + i\,b) = (X - a)^2 + b^2.$$

Matrice şi determinanţi

Matricea este un tabel de numere (reale sau complexe), numite elementele matricei, identificate prin poziţia pe care acestea le ocupă: elementul notat a_{ij} se găseşte la intersecţia liniei i cu coloana j.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{ij} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj-1} & a_{mj} & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Matricea A este o matrice dreptunghiulară de tipul $m \times n$ deoarece are m linii şi n coloane. Se notează cu $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente din $\mathbb{R}$. Dacă numărul de linii coincide cu numărul de coloane ($m = n$), spunem că A este o matrice pătratică (matrice pătrată) de ordinul n. Notaţia $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semnifică mulţimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente din $\mathbb{R}$.

Operaţii cu matrice

- *adunarea* matricelor de acelaşi tip: $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$;
- *înmulţirea cu un scalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$): $\alpha \cdot [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}]$;
- *înmulţirea matricelor* se realizează după regula ”*linie* $\times$ *coloană*”:

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lj}.$$

Înmulţirea este posibilă doar dacă numărul coloanelor primei matrice $[a_{ik}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ este egal cu numărul liniilor celui de-a doua matrice $[b_{kj}] \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$:

$$[a_{ik}] \cdot [b_{kj}] = \left[\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lj}\right].$$

De exemplu, produsul matricei A având trei linii şi două coloane ($m = 3, p = 2$) cu matricea B formată din două linii şi patru coloane ($p = 2, n = 4$) este matricea $C = A \cdot B$ cu trei linii şi patru coloane ($m = 3, n = 4$):

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} \end{bmatrix}.$$

Chiar dacă se poate calcula $A \cdot B$, în general $B \cdot A$ nu are sens. Mai mult, în cazul matricelor pătratice, deşi produsele $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ au ambele sens, în general $A \cdot B \neq B \cdot A$. Cu alte cuvinte, produsul matricelor pătratice nu este o operaţie comutativă.

Matricea nulă **0**, matricea cu toate elementele egale cu 0, este element neutru la adunarea matricelor.

Matricea pătratică de ordinul n având toate elementele nule cu excepţia celor situate pe diagonala principală, care sunt egale cu 1, se notează I_n şi este numită *matricea unitate* de ordinul n. Matricea I_n este element neutru la înmulţirea matricelor pătratice.

Determinantul unei matrice pătratice este numărul (real sau complex) calculat după regula

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sign\,(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Calculul unui determinant cu formula din definiţie este laborioasă, nepractică.

Determinantul matricelor de ordinul 2

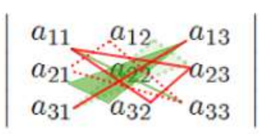
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \overset{not}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

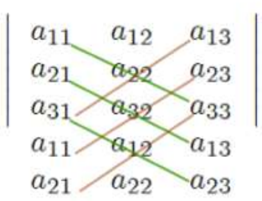
Determinantul matricelor de ordinul 3

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \overset{not}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right).$$

În aplicaţii, pentru calculul determinantului de ordinul al treilea se utilizează regula triunghiurilor sau regula lui Sarrus, reguli ilustrate în figura ce urmează.





Se numeşte *complement algebric* al elementului a_{ij} din matricea A, numărul

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(ce rezultă multiplicând $(-1)^{i+j}$ cu *minorul* corespunzător elementului a_{ij}, adică determinantul matricei obţinute prin eliminarea liniei i şi coloanei j din A).

Dezvoltarea determinantului după linia i :

$$\det A = a_{i1}\Gamma_{i1} + a_{i2}\Gamma_{i2} + \cdots + a_{in}\Gamma_{in}.$$

Dezvoltarea determinantului după coloana j :

$$\det A = a_{1j}\Gamma_{1j} + a_{2j}\Gamma_{2j} + \cdots + a_{nj}\Gamma_{nj}.$$

Proprietăţile determinanţilor

1. Dacă într-o matrice A
- toate elementele unei linii (coloane) sunt nule, sau
- două linii (coloane) sunt egale, sau
- două linii (coloane) sunt proporţionale,

atunci $\det A = 0$.

2. Dacă la o linie (coloană) a unui determinant se adună elementele corespunzătoare ale altei linii (coloane) multiplicate cu un scalar, valoarea determinantului rămâne neschimbată.

Spre exemplu, în determinantul de ordinul trei ce urmează, la linia întâi este adunată linia a treia multiplicată cu α :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{31} & a_{12} + \alpha a_{32} & a_{13} + \alpha a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Dacă se înmulţesc elementele unei linii (sau coloane) din matricea A cu un scalar α, atunci determinantul noii matrice este $\alpha \det A$.

4. Determinantul produsului dintre un scalar α şi o matrice A de ordinul n :
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

5. Determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinanţilor acestora:
$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

6. O matrice de ordinul n se numeşte matrice triunghiulară dacă toate elementele situate dedesubtul (sau deasupra) unei diagonale sunt nule. Determinantul unei matrice triunghiulare este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală sau $(-1)^n$ multiplicat cu produsul elementelor de pe diagonala secundară, după caz.

7. Descompunerea determinantului relativ la o linie (coloană) o ilustrăm în cazul particular al determinantului de ordinul trei, relativ la linia întâi:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Trebuie subliniat că această proprietate este valabilă în cazul determinanţilor de orice ordin, indiferent de linia (sau coloana) luată în considerare.

8. Matricele pătratice de ordinul al doilea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ verifică următoarea identitate remarcabilă (Cayley-Hamilton):
$$A^2 - (a_{11} + a_{22})\,A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,I_2 = \mathbf{0}_2$$

sau, echivalent,
$$A^2 = \mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2,$$

unde $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$ este urma matricei A.

Rangul unei matrice

Rangul unei matrice arbitrare este *ordinul* celui mai mare (în sensul numărului de linii/coloane) determinant nenul ce se poate forma cu elementele matricei date (fără a modifica poziţia lor din liniile/coloanele matricei). *Rangul matricei* este egal cu r, notat $r = rang\ A$, dacă matricea admite un minor nenul de ordin r, iar toţi minorii de ordin $r+1$, dacă există, sunt nuli.

Matricea cu toate elementele nule are rangul 0.

Dacă cel puţin un element al matricei A (cu m linii şi n coloane) este nenul, atunci rangul verifică inegalitatea

$$1 \leq rang\ A \leq \min\{m, n\}.$$

Cum se calculează rangul unei matrice?

Dacă A este o matrice pătrată de ordinul n şi $\det A \neq 0$, atunci $rang\ A = n$.

Dacă A este o matrice arbitrară sau una pătrată cu $\det A = 0$, se procedează în felul următor:

- se fixează un element nenul a_{ij} (dacă este posibil chiar a_{11}, elementul din colţul de NV);

- se bordează elementul a_{ij} cu o nouă linie şi o nouă coloană astfel încât determinantul de ordinul al doilea rezultat să fie nenul şi se trece la etapa următoare ($rang\ A \geq 2$); dacă prin bordarea lui a_{ij} toţi determinanţii de ordinul doi rezultaţi sunt nuli, atunci $rang\ A = 1$ şi calculul s-a încheiat;

- se repetă procedeul descris prin bordarea submatricei de ordinul 2 cu determinant nenul obţinută la etapa precedentă: se caută acum un determinant nenul de ordinul 3; dacă a fost găsit un astfel de determinant, se trece la etapa următoare ($rangA \geq 3$), iar dacă toţi determinanţii de ordinul 3 construiţi sunt nuli, $rangA = 2$ şi calculul s-a încheiat;

- procedeul poate fi repetat cel mult până se atinge rangul $\min\{m, n\}$ (respectiv $n - 1$ în cazul matricelor pătratice).

Inversabilitatea matricelor pătratice. Calculul inversei

O matrice pătratică A se numeşte *inversabilă* (nesingulară) dacă există o matrice (de acelaşi ordin), notată A^{-1}, pentru care

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Condiţia necesară şi suficientă ca matricea A să fie inversabilă este

$$\det A \neq 0.$$

Cum se determină inversa unei matrice A?

- se calculează $\det A$: $\det A = 0 \Rightarrow A$ nu este inversabilă;
$\det A \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă.

- se calculează *transpusa* $A^t = [a_{ji}]$ a matricei $A = [a_{ij}]$, formată cu elementele lui A prin schimbarea liniilor în coloane (păstrând ordinea lor). (Este de remarcat identitatea $\det A = \det A^t$.)

- se calculează reciproca (adjuncta) $A^* = [\Gamma_{ji}]$ a matricei $A = [a_{ij}]$, formată din complemenţii algebrici ai elementelor transpusei $A^t = [a_{ji}]$.

- se determină matricea inversă $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$.

Sisteme de ecuaţii liniare

Un sistem liniar de m ecuaţii cu n necunoscute are forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}.$$

Echivalent, sistemul poate fi exprimat sub forma matriceală $A \cdot X = B$, unde $A = [a_{ij}]$ reprezintă matricea sistemului şi

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ respectiv } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Este posibilă numai una dintre următoarele situaţii:

· Sistemul are soluţie unică şi se numeşte *compatibil determinat*;

· Sistemul admite o infinitate de soluţii şi se numeşte *compatibil nedeterminat*;

· Sistemul nu are soluţii şi se numeşte *incompatibil.*

Cazuri particulare

Sistemul Cramer: dacă A este o matrice pătrată ($m = n$, numărul necunoscutelor coincide cu cel al ecuaţiilor) şi $\det A \neq 0$, atunci sistemul este compatibil determinat, unica sa soluţie, exprimată matriceal, fiind $X = A^{-1} \cdot B$. Acelaşi rezultat se obţine aplicând regula lui Cramer:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\det A},$$

unde determinanţii Δ_k, $k = \overline{1,n}$, rezultă din $\Delta = \det A$ prin înlocuirea coloanei k cu coloana termenilor liberi B.

Sistemul omogen: sistemul în care toţi termenii liberi sunt nuli, adică $b_i = 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$. Sistemele omogene sunt compatibile deoarece admit cel puţin soluţia $(0, 0, \ldots, 0)$, numită soluţia banală.

Matricea extinsă a sistemului este matricea obţinută prin completarea matricei A cu termenii liberi:

$$\overline{A} = (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & |b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & |\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & |b_m \end{pmatrix}.$$

Teorema Kronecker-Capelli

Un sistem algebric liniar este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului coincide cu rangul matricei extinse a sistemului: $rang\ A = rang\ \overline{A}$.

Odată calculat rangul matricei A se evidenţiază *determinantul principal* Δ_p, adică "cel mai mare determinant nenul" (relativ la numărul de coloane) ce se poate forma cu elementele matricei A. Liniile determinantului principal indică ecuaţiile principale, iar coloanele sale, necunoscutele principale; toate celelalte ecuaţii şi necunoscute sunt secundare. Subsistemul format de ecuaţiile principale este un sistem de tip Cramer, iar soluţiile sale sunt chiar soluţiile sistemului iniţial.

Dacă există ecuaţii secundare, atunci determinantul principal poate fi bordat, pe linie, cu coeficienţi situaţi în câte o ecuaţie secundară, şi pe coloană, cu termeni liberi, obţinându-se un determinant ce are ordinul cu o unitate mai mare decât cel principal. Determinanţii obţinuţi prin bordare poartă numele de *determinanţi (minori) caracteristici.*

Teorema lui Rouché

Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli $(rang], A < m)$ sau dacă nu există asemenea minori $(rang\, A = m)$.

Dacă sistemul este compatibil şi $rang\, A = n$, atunci sistemul este compatibil determinat (nu există necunoscute secundare). Dacă sistemul este compatibil şi $rang\ A < n$, atunci gradul de nedeterminare a sistemului este numărul de necunoscute secundare $n - rang\, A > 0$.

Un *sistem omogen* admite soluţii nebanale d.d. rangul matricei sistemului este inferior numărului de necunoscute $(rang\ A < n)$.

Un *sistem omogen* în care numărul ecuaţiilor coincide cu numărul necunoscutelor ($m = n$) admite soluţii nebanale dacă şi numai dacă determinantul matricei sistemului este nul ($\det A = 0$).

Structuri algebrice

Fie M o mulţime nevidă; o lege de corespondenţă ce asociază în mod unic oricărei perechi de elemente din M un element din M

$$(x, y) \mapsto x * y : M \times M \to M$$

se numeşte *lege de compoziţie* pe M.

Simbolul $*$ utilizat pentru a desemna elementul compus $x*y$ este inspirat de cele două tipuri de legi de compoziţie întâlnite din zorii educaţiei matematice, adunarea $(+)$ şi înmulţirea $(\cdot)$. În notaţie aditivă, elementul compus se notează prin $x + y$ şi se numeşte sumă, iar în notaţie multiplicativă se notează $x \cdot y$ (uneori scris pe scurt chiar xy) şi se numeşte produs.

Submulţimea $M_0 \subset M$ se numeşte *parte stabilă a lui M relativ la legea de compoziţie* $*$ dacă pentru orice (x_0, y_0) din $M_0 \times M_0$, elementul $x_0 * y_0$ este situat de asemenea în M_0:

$$(\forall)\, x_0, y_0 \in M_0 \Rightarrow x_0 * y_0 \in M_0.$$

Legea de compoziţie $*$ se numeşte *asociativă* dacă

$$(\forall)\, x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)\,.$$

Legea de compoziţie $*$ se numeşte *comutativă* dacă

$$(\forall)\, x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x.$$

Elementul $a \in M$ se numeşte *element absorbant pentru legea* $*$ dacă

$$(\forall)\, x \in M \Rightarrow x * a = a * x = a.$$

Elementul $e \in M$ se numeşte *element neutru pentru legea* $*$ dacă

$$(\forall)\, x \in M \Rightarrow x * e = e * x = x.$$

Elementul neutru pentru o lege de compoziţie, dacă există, este unic.

Elementul neutru al unei legi de compoziţie de tip aditiv este notat prin 0 şi este numit *element de efect nul* (sau, mai simplu, *zero*).

Elementul neutru al unei legi de compoziţie de tip multiplicativ este notat prin 1 şi este numit *element unitate.*

Un element $x \in M$ se numeşte *simetrizabil în raport cu legea* $*$ dacă

$$(\exists)\, x' \in M \quad \text{a.î.} \quad x * x' = x' * x = e.$$

Elementul notat prin x' se numeşte *simetricul lui* x. Evident, x' este simetrizabil şi

$$(x')' = x.$$

Dacă elementele $x, y \in M$ sunt simetrizabile, atunci $x * y$ este simetrizabil şi

$$(x * y)' = y' * x'.$$

Simetricul lui x în raport cu o lege de compoziţie de tip aditiv este notat prin $-x$ şi este numit *opusul lui* x.

Simetricul lui x în raport cu o lege de compoziţie de tip multiplicativ este notat prin x^{-1} şi este numit *inversul lui* x.

Definiţie

Mulţimea nevidă M, înzestrată cu legea de compoziţie $*$, se numeşte *monoid* dacă legea $*$ este asociativă şi are element neutru:

$(\forall)\, x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)\,;$

$(\exists)\, e \in M \quad \text{a.î.} \quad (\forall)\, x \in M \Rightarrow x * e = e * x = x.$

Dacă legea de compoziţie este comutativă, atunci M se numeşte *monoid comutativ.*

Definiţie

Mulţimea nevidă G, înzestrată cu legea de compoziţie $*$, se numeşte *grup* dacă legea $*$ este asociativă, are element neutru şi toate elementele din G sunt simetrizabile.

Aşadar, $(G, *)$ este grup d.d. sunt satisfăcute următoarele axiome:

$(\forall)\, x, y, z \in G \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)\,;$

$(\exists)\, e \in G \quad \text{a.î.} \quad (\forall)\, x \in G \Rightarrow x * e = e * x = x;$

$(\forall)\, x \in G \quad (\exists)\, x' \in G \quad \text{a.î.} \quad x * x' = x' * x = e.$

Dacă legea de compoziţie este comutativă, atunci grupul $(G, *)$ se numeşte *grup comutativ* sau *abelian.*

Teoremă

Fie $(G, *)$ un grup şi $a, b \in G$ două elemente arbitrare din G. Ecuaţiile $a * x = b$ şi $y * a = b$ au soluţii unice în G, mai precis

$$\begin{array}{rcl} a * x & = & b \quad \Longleftrightarrow \quad x = a' * b, \quad \text{respectiv} \\ y * a & = & b \quad \Longleftrightarrow \quad y = b * a'. \end{array}$$

Fie $(G, +)$ un grup în care legea de compoziţie este de tip aditiv. Atunci pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ şi $a \in G$ au loc identităţile:

$$ma + na = (m + n)\, a, \quad m\,(na) = (mn)\, a, \quad -(na) = n\,(-a)\,,$$

unde pentru $n \neq 0$,

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ ori}} = na,$$

şi, prin convenţie, $0a = 0$.

Dacă $(G, \cdot)$ este un grup în care legea de compoziţie este de tip multiplicativ, atunci pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ şi $a \in G$ au loc identităţile:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (a^n)^{-1} = a^{-n},$$

unde pentru $n \neq 0$,

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}} = a^n,$$

şi, prin convenţie, $a^0 = 1$.

Definiţie

Fie $(G, *)$ un grup. O submulţime nevidă H a lui G se numeşte *subgrup* al grupului $(G, *)$ dacă $(H, *|_H)$ este de asemenea grup, unde $*|_H$ este legea de compoziţie pe H indusă de legea de compoziţie pe G, adică

$$\forall x, y \in H : x *|_H\, y = x * y \in H.$$

$(H, *)$ este subgrup al grupului $(G, *)$ d.d.

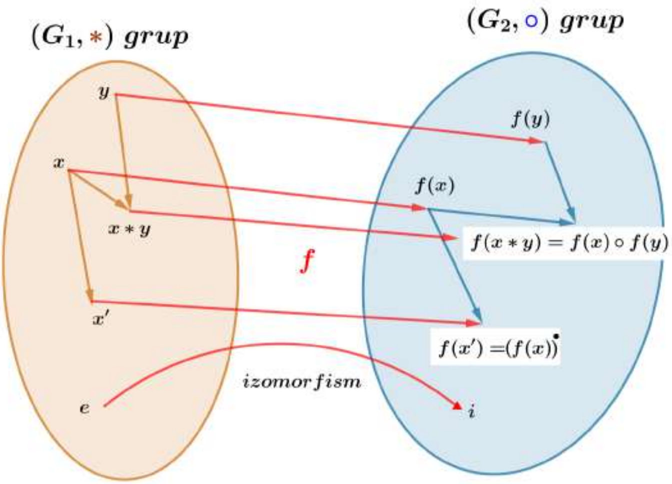
$(\forall)\, x, y \in H \Rightarrow x * y \in H;$

$(\forall)\, x \in H \Rightarrow x' \in H.$

Definiţie

Fie $(G_1, *)$ şi $(G_2, \circ)$ două grupuri; funcţia bijectivă $f : G_1 \to G_2$ se numeşte *izomorfim* de grupuri dacă

$$f\,(x * y) = f\,(x) \circ f\,(y) \qquad (\forall)\, x, y \in G_1.$$



e şi i sunt elementele neutre ale celor două grupuri. Este indicat cu *accent* ($'$) simetricul din grupul G_1, respectiv cu *punct* ($^{\bullet}$) simetricul din grupul G_2.

Exemplu

Funcţia logaritm natural $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ realizează un izomorfism între $((0, +\infty), \cdot)$, grupul multiplicativ al numerelor pozitive şi $(\mathbb{R}, +)$, grupul aditiv al numerelor reale. Într-adevăr, funcţia ln este bijectivă şi satisface condiţia

$$\ln (x \cdot y) = \ln x + \ln y.$$

Definiţie

O mulţime nevidă A înzestrată cu două legi de compoziţie, una aditivă şi una multiplicativă, notate tradiţional $+$ şi $\cdot$, se numeşte inel dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

$(A, +)$ este grup comutativ,
$(A, \cdot)$ este monoid,
înmulţirea $(\cdot)$ este distributivă faţă de adunare $(+)$, mai precis
$(\forall)\, x, y, z \in A: \quad x(y+z) = xy + xz \quad$ şi $\quad (y+z)\,x = yx + zx.$

Dacă înmulţirea elementelor din A este o lege de compoziţie comutativă, atunci inelul $(A, +, \cdot)$ se numeşte inel *comutativ.*

Inelul $(A, +, \cdot)$ este un inel fără divizori ai lui zero dacă

$$x \neq 0 \quad \text{şi} \quad y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad xy \neq 0.$$

Un inel comutativ (format din cel puţin două elemente) fără divizori ai lui zero se numeşte *domeniu de integritate.*

Elementele nenule $u, v \in A$ sunt divizori ai lui zero dacă $uv = 0$.

Astfel, inelul numerelor întregi $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ este domeniu de integritate. Singurele elemente inversabile (adică simetrizabile faţă de operaţia multiplicativă $\cdot$) sunt 1 şi -1.

Definiţie

Fie $(A_1,+,\cdot)$ şi $(A_2,+,\cdot)$ două inele (fiecare înzestrată cu propriile sale legi de compoziţie, deşi acestea sunt notate similar); funcţia bijectivă $f: A_1 \to A_2$ se numeşte *izomorfim* de inele dacă

$$\begin{array}{c} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y) \end{array} \qquad (\forall)\, x, y \in A_1.$$

Definiţie

Un inel $(K,+,\cdot)$ se numeşte corp dacă $0 \neq 1$ şi orice element nenul x este inversabil.

Exemple

Mulţimile numerice $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ cu operaţiile uzuale sunt corpuri comutative.

$\mathbb{Z}_p$, inelul claselor de resturi modulo p

Fie n un număr întreg arbitrar şi p un număr natural nenul fixat; conform teoremei împărţirii cu rest, există doi întregi, q şi r, unic determinaţi, astfel încât

$$n = qp + r \quad \text{cu} \quad 0 \leq r < p.$$

Numărul q se numeşte *cât* al împărţirii $n:p$, iar r se numeşte *rest.* Resturile posibile la împărţirea $n:p$ sunt 0, 1, 2, ..., $p-1$. Astfel mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se poate descompune în p submulţimi disjuncte:

$$\begin{aligned}
\left\{\ldots,-p,\boxed{0},p,2p,\ldots\right\} &= \{kp \mid k\in\mathbb{Z}\} \overset{not}{=} \widehat{0},\\
\left\{\ldots,-p+1,\boxed{1},p+1,2p+1,\ldots\right\} &= \{kp+1 \mid k\in\mathbb{Z}\} \overset{not}{=} \widehat{1},\\
&\ \ \vdots\\
\{\ldots,-p+r,\boxed{r},p+r,2p+r,\ldots\} &= \{kp+r \mid k\in\mathbb{Z}\} \overset{not}{=} \widehat{r},\\
&\ \ \vdots\\
\left\{\ldots,-p+(p-1),\boxed{p-1},p+(p-1),\ldots\right\} &= \{kp+(p-1) \mid k\in\mathbb{Z}\}\\
&\overset{not}{=} \widehat{p-1},
\end{aligned}$$

numite clase de resturi modulo p. Mulţimea tuturor claselor de resturi modulo p se notează $\mathbb{Z}_p$:

$$\mathbb{Z}_p = \left\{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \ldots, \widehat{p-1}\right\}.$$

Pe această mulţime se introduc două legi de compoziţie după cum urmează:

adunarea claselor modulo p, $\widehat{a} + \widehat{b} \overset{def}{=} \widehat{a+b}$ şi

înmulţirea claselor modulo p, $\widehat{a} \cdot \widehat{b} \overset{def}{=} \widehat{a \cdot b}$.

Adunarea şi înmulţirea sunt corect definite deoarece, conform definiţiei claselor de resturi, dacă întregul $k \in \widehat{r}$ şi $0 \leq r < p$, atunci $\widehat{k} = \widehat{r}$.

$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ este inel comutativ în care elementul neutru la adunare este $\widehat{0}$, iar elementul neutru la înmulţire este $\widehat{1}$.

Orice clasă de resturi $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p$ are opus: $-\widehat{a} = \widehat{p-a}$.

Nu toate clasele de resturi din $\mathbb{Z}_p$ sunt inversabile: elementul $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p$ este inversabil d.d. singurul divizor comun al lui a şi p este 1.

În consecinţă, dacă a este divizor propriu al lui p $(a \neq 1$ şi $a \neq p)$, atunci $p = ab$, iar $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = \widehat{p} = \widehat{0}$, deci $\widehat{a}$ este divizor al lui zero.

i) Dacă p este neprim, atunci $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ *este inel cu divizori ai lui zero.*

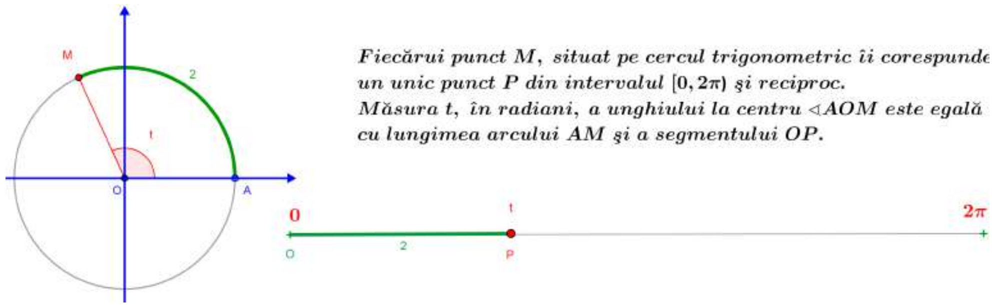
ii) Dacă p este un număr prim, atunci toate elementele din $\mathbb{Z}_p \setminus \left\{\widehat{0}\right\}$ sunt inversabile, ceea ce conferă lui $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ o structură de *corp comutativ.*

iii) Dacă p este un număr prim, atunci $\widehat{a}^{p-1} = \widehat{1}$ oricare ar fi $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p \setminus \left\{\widehat{0}\right\}$.

TRIGONOMETRIE ŞI GEOMETRIE

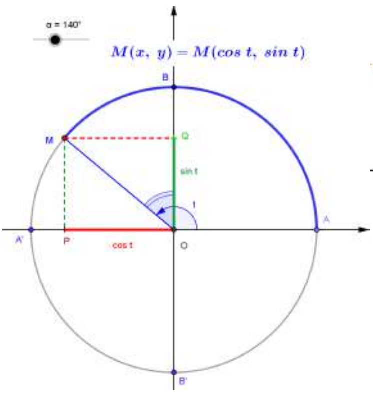
Funcţiile trigonometrice

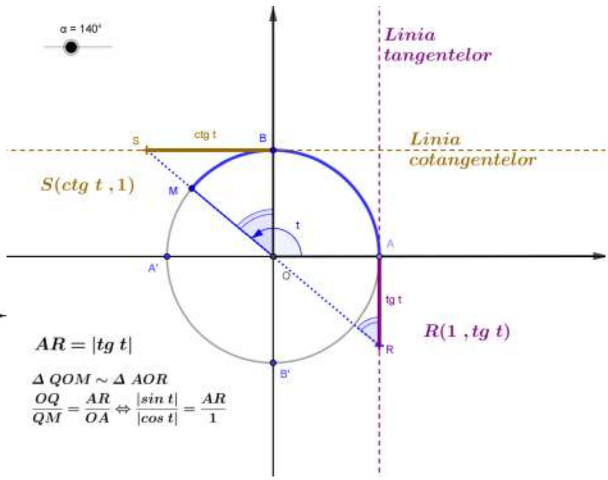
$\mathcal{C}(O; 1) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ - cercul trigonometric (centrat în originea axelor de coordonate cu raza 1). $M(x, y)$ - punctul curent pe cercul trigonometric.



$t \in [0, 2\pi)$ - măsura în radiani a unghiului la centru format de semiaxa pozitivă Ox cu raza vectoare OM.

Corespondenţa $t \longleftrightarrow M\,(x, y)$ este bijectivă.





Definiţii $\boxed{\cos t = x, \quad \sin t = y, \quad \operatorname{tg} t = \dfrac{y}{x} \quad \text{şi} \quad \operatorname{ctg} t = \dfrac{x}{y}.}$

Definiţia se poate extinde de la intervalul $[0, 2\pi)$ la $\mathbb{R}$ prin periodicitate, şi reciproc, fiecărui număr real îi corespunde un unic număr din $[0, 2\pi)$ prin procedeul numit "*reducerea la perioada principală*":

$$(\forall)\, t \in \mathbb{R} \quad (\exists!)\, t^* \in [0, 2\pi) \;\text{ a.î. }\; t = t^* + 2k\pi, \quad \text{unde} \quad k \in \mathbb{Z}\ , \ k = \left[\frac{t}{2\pi}\right], \text{ cu}$$

$$\cos t = \cos t^* \quad \text{şi} \quad \sin t = \sin t^*$$

Proprietăţile funcţiilor cos şi sin

cos şi sin sunt *mărginite*: $|\cos t| \leq 1$ şi $|\sin t| \leq 1 \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R}$.

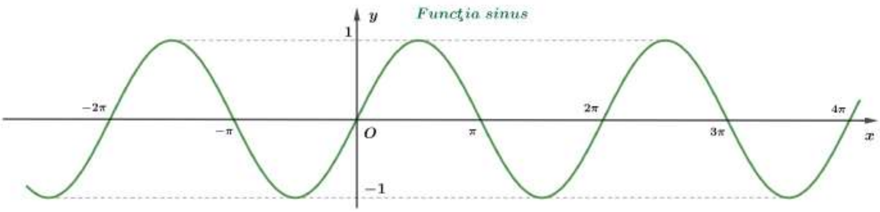
cos şi sin sunt *periodice* cu *perioada* 2π : $\begin{array}{ll} \cos(t+2k\pi) = \cos t & (\forall)\, t \in \mathbb{R} \\ \sin(t+2k\pi) = \sin t & (\forall)\, k \in \mathbb{Z} \end{array}$

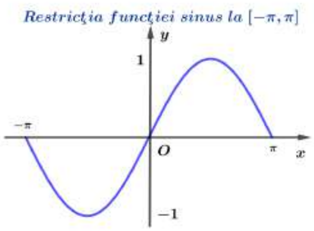
$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ este o funcţie *pară*, adică $\cos(-t) = \cos t$.

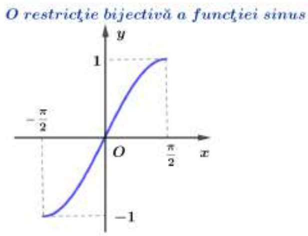
Funcţia cos este *pozitivă* în cadranele I şi IV, respectiv *negativă* în II şi III.

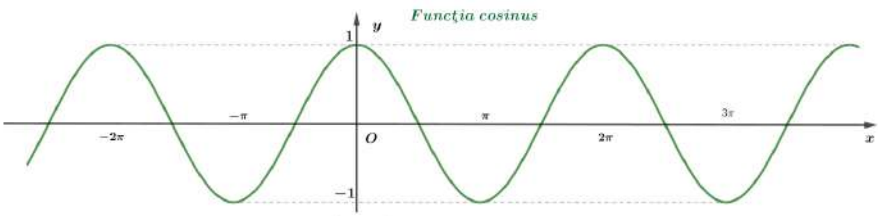
$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ este o funcţie *impară*, adică $\sin(-t) = -\sin t$.

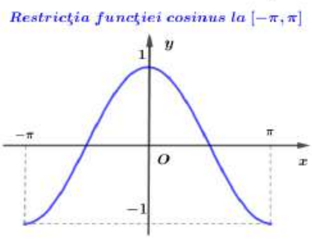
Funcţia sin este *pozitivă* în cadranele I şi II, respectiv *negativă* în III şi IV.

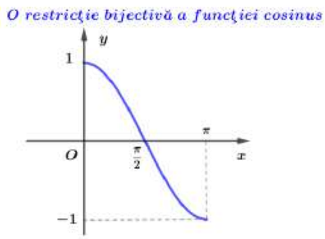












Tabelul de valori al funcţiilor sin şi cos

^{o}	0	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

^{o}	180	210	225	240	270	300	315	330	360
rad	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Proprietăţile funcţiilor tg şi ctg

$$\operatorname{tg}(t+n\pi)=\operatorname{tg}t \qquad (\forall)\, t\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}, n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}(t+n\pi)=\operatorname{ctg}t \qquad (\forall)\, t\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}, n\in\mathbb{Z}.$$

$\operatorname{tg}:\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ este o funcţie *impară*: $\operatorname{tg}(-t)=-\operatorname{tg}t$.

$\operatorname{ctg}:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$ este o funcţie *impară*: $\operatorname{ctg}(-t)=-\operatorname{ctg}t$.

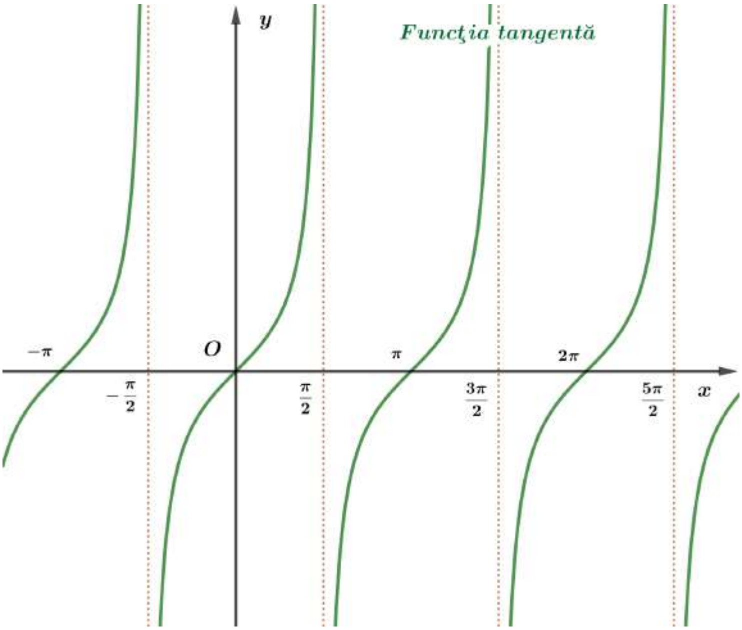
Funcţiile tg şi ctg sunt *pozitive* în I şi III respectiv *negative* în II şi IV.

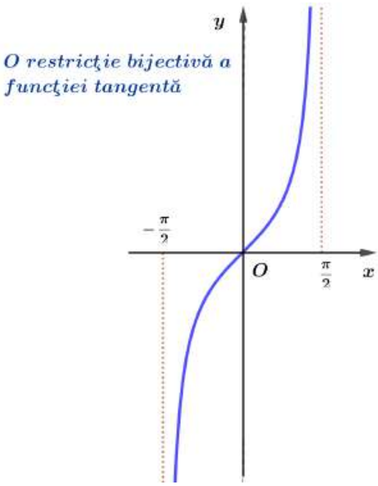
Dreptele $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ sunt asimptote verticale la graficul funcţiei tangentă:

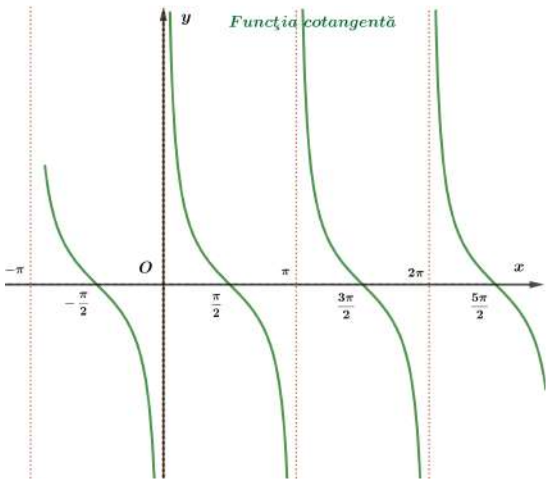
$$\lim_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg}t=\infty, \qquad \lim_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\ t>\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg}t=-\infty.$$

Dreptele $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ sunt asimptote verticale la graficul funcţiei cotangentă:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\operatorname{ctg}t=-\infty, \qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\operatorname{ctg}t=\infty.$$







Tabelul de valori al funcţiilor tg şi ctg

^{0}	0	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	$_{-\infty}\vert^{+\infty}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$_{-\infty}\vert^{+\infty}$

Relaţii între funcţiile trigonometrice

Formule fundamentale

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad ; \quad 1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \quad ; \quad 1 + \mathrm{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} \; .$$

Funcţiile trigonometrice ale complementului

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos t \;;\quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \mathrm{ctg}\, t \;;\\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \sin t \;;\quad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \mathrm{tg}\, t \;. \end{aligned}$$

Funcţiile trigonometrice ale sumei şi diferenţei de arce

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$; $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;

$\mathrm{tg}\,(a+b) = \dfrac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b}{1 - \mathrm{tg}\, a \mathrm{tg}\, b}$; $\mathrm{tg}\,(a-b) = \dfrac{\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}\, b}{1 + \mathrm{tg}\, a \mathrm{tg}\, b}$.

Funcţiile trigonometrice ale dublului şi triplului unui arc

$\sin 2t = 2\cos t \sin t$; $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$;

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t = \cos^2 t - \sin^2 t$; $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$;

$\mathrm{tg}\, 2t = \dfrac{2\mathrm{tg}\, t}{1 - \mathrm{tg}^2 t}$; $\mathrm{tg}\, 3t = \dfrac{3\mathrm{tg}\, t - \mathrm{tg}^3 t}{1 - 3\mathrm{tg}^2 t}$.

Exprimarea funcţiilor trigonometrice cu ajutorul arcului dublu

$$\sin t = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2t}{2}}; \quad \cos t = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2t}{2}}; \quad \mathrm{tg}\, t = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t}};$$

Semnul din faţa radicalului $\left\langle \begin{array}{l} \text{se stabileşte cadranul ce îl conţine pe } t; \\ \text{se alege semnul funcţiei din cadranul lui } t. \end{array} \right.$

Exprimarea raţională a funcţiilor trigonometrice

$$\sin t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}};\quad \cos t = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}};\quad \operatorname{tg} t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}.$$

Transformarea sumei/diferenţei în produs

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};\quad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2};$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};\quad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2};$$
$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q};\qquad \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}.$$

Transformarea produsului în sumă/diferenţă

$$\begin{aligned}\sin a\sin b &= \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b);\\ \cos a\cos b &= \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b);\\ \sin a\cos b &= \frac{1}{2}\sin(a-b) + \frac{1}{2}\sin(a+b).\end{aligned}$$

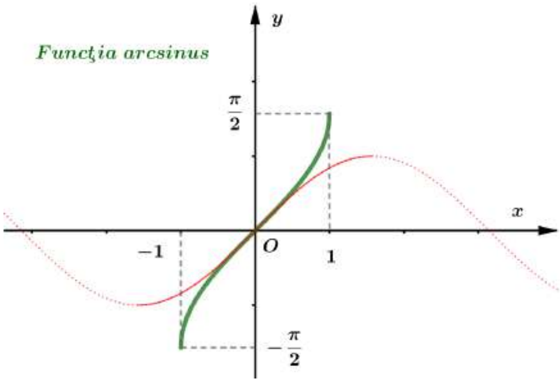
Funcţiile trigonometrice inverse

Restricţia $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ este bijectivă (deci inversabilă).

Definiţie

$\arcsin a =$ "arcul cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{2}$ al cărui sinus este a" $\quad (-1 \le a \le 1)$

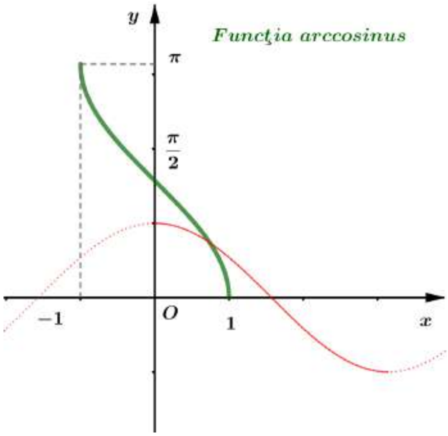
$$\boxed{\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\qquad \begin{array}{ccc} \arcsin x = y & \Leftrightarrow & x = \sin y \\ x \in [-1,1] & , & y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}}$$



$\arcsin(-x) = -\arcsin x$
(arcsin este impară)

Restricţia $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ este bijectivă (deci inversabilă).
Definiţie
$\arccos a =$ "arcul cuprins între 0 şi π al cărui cosinus este a" $(-1 \le a \le 1)$

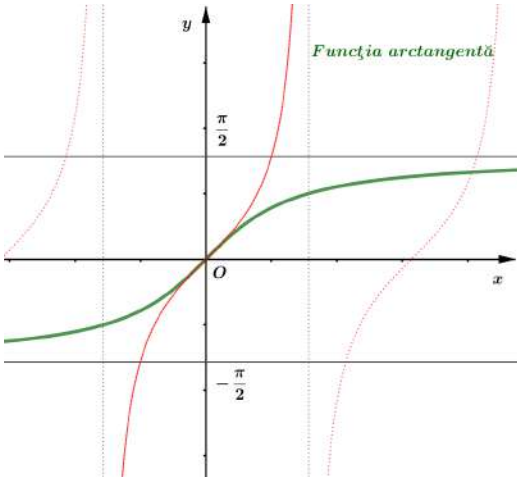
$$\boxed{\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad \begin{array}{ccc} \arccos x = y & \Leftrightarrow & x = \cos y \\ x \in [-1,1] & , & y \in [0,\pi] \end{array}}$$



$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

Restricţia $\operatorname{tg} : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ este bijectivă (deci inversabilă).
Definiţie
$\operatorname{arctg} a =$ "arcul cuprins între $-\dfrac{\pi}{2}$ şi $\dfrac{\pi}{2}$ a cărui tangentă este a" $(a \in \mathbb{R})$

$$\boxed{\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \quad \begin{array}{ccc} \operatorname{arctg} x = y & \Leftrightarrow & x = \operatorname{tg} y \\ x \in \mathbb{R} & , & y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}}$$



$\text{arctg}\,(-x) = -\text{arctg}\,x$
(arctg este impară)

Dreptele $y = -\frac{\pi}{2}$ şi $y = \frac{\pi}{2}$ sunt asimptote orizontale la graficul funcţiei arctangentă.

$$\lim_{x\to-\infty} \text{arctg}\,x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to\infty} \text{arctg}\,x = \frac{\pi}{2}$$

Relaţii remarcabile între funcţiile trigonometrice inverse

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad (x \in [-1,1])$$

$$\text{arctg}\,x + \text{arctg}\,\frac{1}{x} = sign\,(x)\cdot\frac{\pi}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

$$\text{arctg}\,x + \text{arctg}\,y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\text{arctg}\,x + \text{arctg}\,y = \text{arctg}\,\frac{x+y}{1-xy}}$$

Ecuaţiile trigonometrice elementare

1. Ecuaţia $\sin x = a$ are soluţie d.d. $a \in [-1,1]$.

Mulţimea soluţiilor sale este $\left\{(-1)^k \arcsin a + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

În particular, $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Ecuaţia $\cos x = a$ are soluţie d.d. $a \in [-1, 1]$.

Mulţimea soluţiilor sale este $\{\pm \arccos a + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

În particular, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. Ecuaţia $\operatorname{tg} x = a$ *are soluţie* $(\forall)\ a \in \mathbb{R}$.

Mulţimea soluţiilor sale este $\{\operatorname{arctg} a + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

În particular, $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Ecuaţia liniară

$$a\cos t + b\sin t = c \ \left(a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0\right)$$

are soluţii dacă şi numai dacă $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Metode de rezolvare a ecuaţiei liniare

· Substituţia $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ conduce la sistemul $\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

· Substituţia $z = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ conduce la ecuaţia de gradul al doilea

$$a\left(1 - z^2\right) + 2bz = c\left(1 + z^2\right).$$

Această metodă are neajunsul de a pierde (eventual) soluţiile de forma $(2k+1)\pi$.

· Metoda unghiului auxiliar constă în transformarea expresiei din membrul stâng al ecuaţiei.

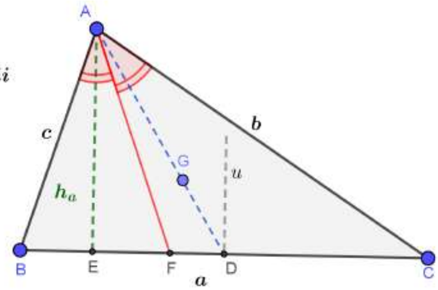
$$a\cos t + b\sin t = c \Leftrightarrow \cos t + \frac{b}{a}\sin t = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \cos t + \operatorname{tg}\varphi \sin t = \frac{c}{a} ,$$

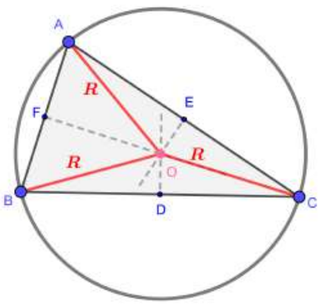
unde $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, numit unghi auxiliar, este unicul cu proprietatea tg $\varphi = \frac{b}{a}$. Rezultă imediat

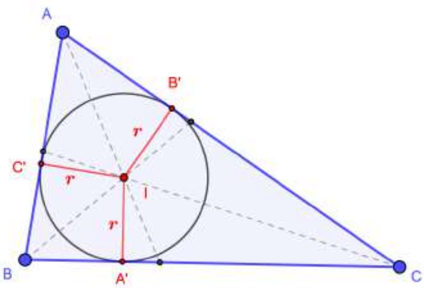
$$\begin{aligned} \cos(t - \varphi) &= \frac{c}{a}\cos\varphi \Leftrightarrow \\ t &\in \left\{\varphi \pm \arccos\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right) + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

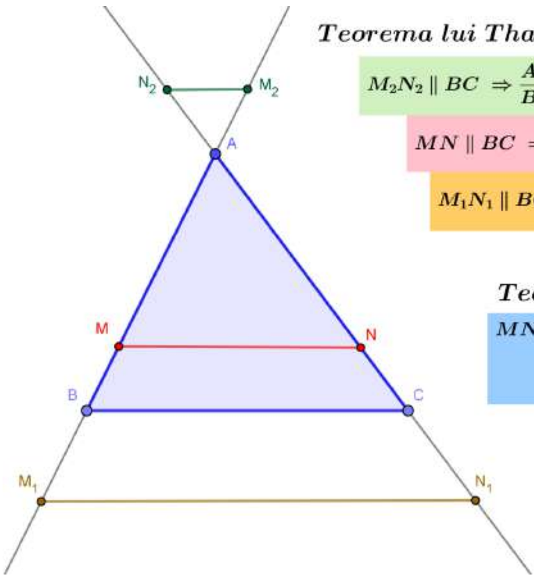
Aplicaţiile trigonometriei în geometrie

$AE \perp BC$, h_a – *lungimea înălţimii*
$\widehat{BAF} \equiv \widehat{CAF}$, AF – *bisectoare*
$BD \equiv DC$, AD – *mediană*
G, *centrul de greutate*
$AG = \frac{2}{3} AD$ *şi* $GD = \frac{1}{3} AD$
$|Du \perp BC$, $|Du$ – *mediatoare*









Teorema lui Thales

$M_2N_2 \parallel BC \Rightarrow \frac{AM_2}{BM_2} = \frac{AN_2}{CN_2}$

$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$

$M_1N_1 \parallel BC \Rightarrow \frac{AM_1}{BM_1} = \frac{AN_1}{CN_1}$

Teorema asemănării

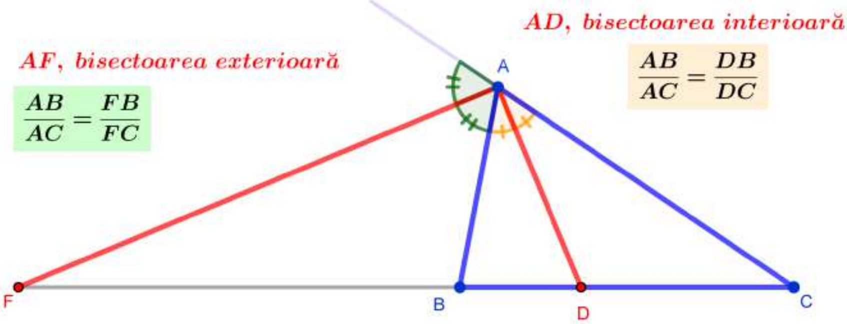
$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} (= \rho)$$

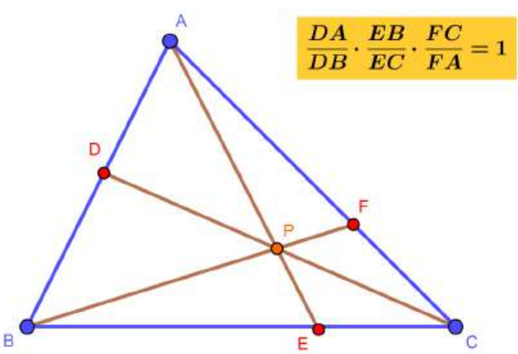
ρ, *raportul de asemănare*

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \rho^2$$

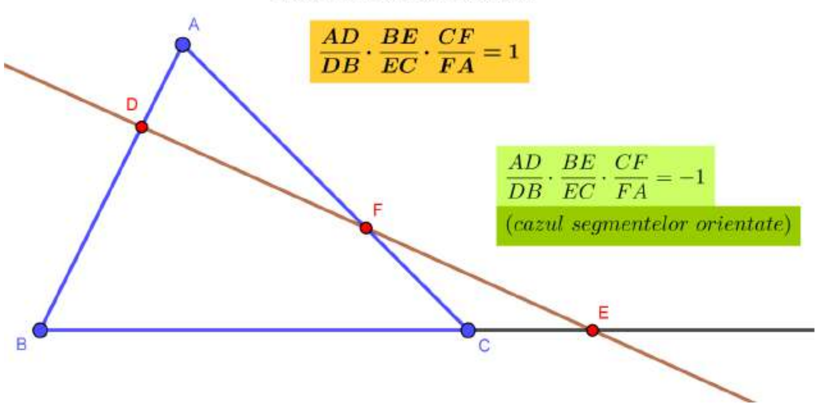
Teorema bisectoarei

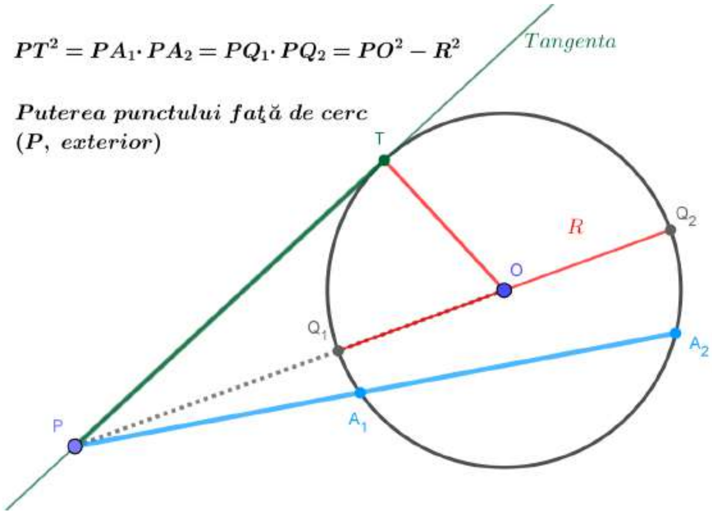


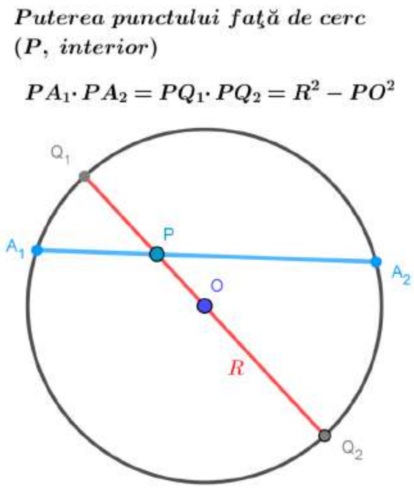
Teorema lui Ceva



Teorema lui Menelaus







Teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Teorema cosinusului

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Aria triunghiului

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{ah_a}{2} &= \frac{bh_b}{2} &= \frac{ch_c}{2}\\
S &= \frac{bc\sin A}{2} &= \frac{ca\sin B}{2} &= \frac{ab\sin C}{2}\\
S &= \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} &= \frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B} &= \frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= 2R^2\sin A\sin B\sin C\\
S &= r^2\mathrm{ctg}\,\frac{A}{2}\mathrm{ctg}\,\frac{B}{2}\mathrm{ctg}\,\frac{C}{2}\\
S &= pr \qquad p=\frac{a+b+c}{2}\\
S &= \frac{abc}{4R}
\end{aligned}
$$

$$S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \qquad \text{(formula lui Heron)}$$

Numere complexe

Aplicaţiile trigonometriei în algebră

$\mathbb{C}=\{\ z=x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\ ,\ i^2=-1\}$ -mulţimea numerelor complexe

$z=x+iy$, forma algebrică a numărului complex z

$\mathrm{Re}z=x$, partea reală a numărului complex z

$\mathrm{Im}z=y$, partea imaginară a numărului complex z

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, modulul numărului complex z

$\overline{z}=x-iy$, conjugatul numărului complex z

$z\cdot\overline{z}=|z|^2$

Numărul complex $z = x + iy$ este *afixul* punctului $M(x, y)$, iar conjugatul său , $\overline{z} = x - iy$, este *afixul* simetricului punctului $M(x, y)$ faţă de axa Ox.

- se notează prin t unghiul format de dreapta OM $(M \neq O)$ cu semiaxa pozitivă Ox (*argumentul* lui z);

- se notează prin r lungimea segmentului OM (*modulul* lui z);

- din definiţia funcţiilor trigonometrice rezultă

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} (r > 0 \text{ iar } t \in [0, 2\pi)).$$

$$z = r(\cos t + i\sin t) \text{ } \textit{forma trigonometrică a lui } z$$

Numerele r şi t sunt cordonatele polare ale punctului $M(x, y)$: r este *raza polară*, O este *polul*, iar t este *argumentul* lui z.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ t &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi \end{aligned}$$

$(k = 0$ pt. $M \in CadrI, k = 1$ pt. $M \in CadrII - III, k = 2$ pt. $M \in CadrIV)$.

Înmulţirea şi împărţirea numerelor complexe $z_j = r_j(\cos t_j + i\sin t_j)$, $j = \overline{1,2}$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2)] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)] \end{aligned}$$

Formula lui Moivre

$$z = r(\cos t + i\sin t) \Rightarrow z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt)$$

Rădăcina complexă de ordinul n a numărului complex $z = r(\cos t + i\sin t)$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{t + 2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

Elemente de geometrie analitică

Vectori

Versorii axelor de coordonate: $\bar{\mathbf{i}} = (1, 0)$ şi $\bar{\mathbf{j}} = (0, 1)$.

Vectorul de poziţie al punctului $M(x, y)$: $\overrightarrow{OM} = x\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}}$.

Lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$ (distanţa dintre M şi origine): $\begin{array}{rcl} \|OM\|^2 & = & x^2 + y^2 \\ OM^2 & = & x^2 + y^2. \end{array}$

Vectorul cu originea $T(a, b)$ şi extremitatea $M(x, y)$:

$$\overrightarrow{TM} = (x - a)\,\bar{\mathbf{i}} + (y - b)\,\bar{\mathbf{j}}.$$

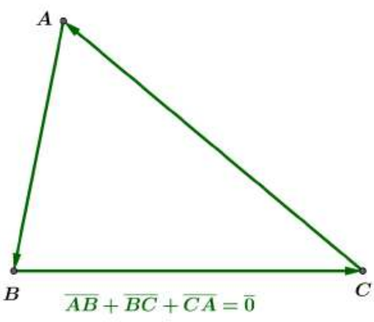
Lungimea vectorului $\overrightarrow{TM}$ (distanţa dintre punctele $T(a, b)$ şi $M(x, y)$):

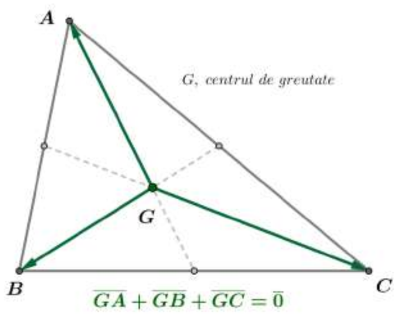
$$\left\|\overrightarrow{TM}\right\| = TM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Împărţirea segmentului PQ în raportul $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $\overline{PM} = k\overline{MQ}$

$$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \Rightarrow M(x, y) \quad cu \quad x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k} \text{ şi } y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Caz particular $k = 1$, mijlocul segmentului PQ : $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.





Dreapta în plan

1. Ecuaţia generală explicită : $y = mx + n$

   (m, panta dreptei : $m = tg\varphi$, unde φ este unghiul dintre dreaptă şi semiaxa pozitivă Ox).

   (Dreptele paralele cu axa Oy - dreptele verticale - sunt caracterizate prin ecuaţia $x = p$; panta acestora este infinită.)

2. Ecuaţia generală implicită : $Ax + By + C = 0$ $\left(m = -\frac{A}{B}\right)$.

3. Ecuaţia dreptei prin tăieturi : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (dreapta taie Ox în a şi Oy în b).

4. Ecuaţia dreptei ce trece prin $T(a,b)$ şi are panta m : $y - b = m(x - a)$.

5. Ecuaţia dreptei ce trece prin $T(a,b)$ şi $S(u,v)$, TS : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = 0.$

   Panta dreptei TS este $m_{TS} = \dfrac{v-b}{u-a}$.

Aria triunghiului ABC cu $A(a_1,a_2), B(b_1,b_2), C(c_1,c_2)$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$.

Distanţa de la punctul $T(a,b)$ la dreapta (d) : $Ax + By + C = 0$

$$dist\,(T,d) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Unghiul ascuţit al dreptelor $(d_1) : y = m_1x + n_1$ şi $(d_2) : y = m_2x + n_2$ este ψ cu

$$tg\,\psi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}\right|.$$

În cazul dreptelor exprimate explicit (de pantă finită)

$(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

$(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$.

Cercul

Cercul este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix (numit centru).

1. Ecuaţia cercului de rază r şi centru $C(u,v)$:

$$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2.$$

2. Ecuaţia generală a cercului : $x^2+y^2+a\cdot x+b\cdot y+c=0.$

3. Ecuaţia cercului ce trece prin punctele $A(m,n)\,,B(s,t)$ şi $C(p,q)$:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ m^2+n^2 & m & n & 1 \\ s^2+t^2 & s & t & 1 \\ p^2+q^2 & p & q & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Intersecţia dreptei cu cercul este dată de soluţia sistemului:

$$\begin{cases} x^2+y^2+a\cdot x+b\cdot y+c=0 \\ y=mx+n \end{cases}.$$

ANALIZĂ MATEMATICĂ

A. Şiruri de numere reale

O funcţie reală f definită pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ (sau, echivalent, pe o secţiune $\mathbb{N}_m$ a sa ce cuprinde toate numerele naturale ce depăşesc o valoare fixată m) se numeşte *şir de numere reale*. Este convenabilă precizarea şirului prin intermediul termenului său general a_n, unde $a_n=f(n)\,,n\in\mathbb{N}$. Vom nota şirul prin $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau mai simplu $(a_n)_n$.

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *monoton* dacă şi numai dacă *sign* $(a_{n+1}-a_n)$ este constant oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. În particular:

dacă $a_{n+1}-a_n>0\quad(\forall)\,n\in\mathbb{N}\quad\Rightarrow\quad(a_n)$ este *strict crescător*
dacă $a_{n+1}-a_n<0\quad(\forall)\,n\in\mathbb{N}\quad\Rightarrow\quad(a_n)$ este *strict descrescător*

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte *mărginit* dacă toţi termenii săi se găsesc într-un interval mărginit:

$$(\exists)\, M > 0 \ \text{ a. î. } \ |a_n| \le M, (\forall)\, n \in \mathbb{N} \ .$$

Definiţie

Şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte *convergent* dacă există un număr real l cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \ge n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $|a_n - l| < \varepsilon$. Numărul real l este unic determinat şi se numeşte *limita* şirului cu termenul general a_n; vom nota aceasta prin $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $a_n \to l$.

Şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ $(-\infty)$ dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ se poate preciza un rang n_ε astfel încât, pentru orice $n \ge n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $a_n > \varepsilon$ $(a_n < -\varepsilon)$.

Şirurile care au limita infinită sau cele pentru care limita nu există se numesc *divergente*.

Dacă $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir strict crescător de numere naturale, atunci şirul $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte *subşir* al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. În particular, pentru $k_n = 2n$ se obţine subşirul termenilor de rang par, $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, iar pentru $k_n = 2n+1$ se obţine subşirul termenilor de rang impar, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Teoremă

Dacă un şir are limită, atunci orice subşir al său are aceeaşi limită.
În consecinţă, dacă două subşiruri ale aceluiaşi şir au limite diferite, atunci şirul respectiv nu are limită.

De exemplu, şirul dat de termenul general $a_n = (-1)^n n, n \in \mathbb{N}$, nu are limită deoarece $a_{2n} = 2n \to \infty$, iar $a_{2n+1} = -(2n+1) \to -\infty$.

Teoremă

1. Fie $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ două şiruri convergente având aceeaşi limită l, iar $(x_n)_n$ este un alt şir care verifică dubla inegalitate:

$$a_n \le x_n \le b_n \ \text{ oricare ar fi } n \ge n'.$$

Atunci $(x_n)_n$ este convergent, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

2. Dacă $(a_n)_n$ este un şir cu limita ∞, iar $(x_n)_n$ un şir astfel ca $x_n \ge a_n$, oricare ar fi $n \ge n'$, atunci $x_n \to \infty$.

3. Dacă $(b_n)_n$ este un şir cu limita $-\infty$, iar $(x_n)_n$ un şir astfel ca $x_n \le b_n$, oricare ar fi $n \ge n'$, atunci $x_n \to -\infty$.

Consecinţa 1

Fie $(b_n)_n$ un şir convergent având limita 0 şi $(x_n)_n$ un alt şir pentru care există numărul real l cu proprietatea

$$|x_n - l| \leq b_n \text{ pentru orice } n \geq n'.$$

Atunci $(x_n)_n$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Consecinţa 2

Fie şirul $(x_n)_n$ cu termenul general de forma $x_n = a_n \cdot b_n$; dacă $(a_n)_n$ este un şir mărginit, iar $(b_n)_n$ unul convergent cu limita 0, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Teoremă

(i) Orice şir monoton are limită, finită sau infinită.

(ii) Orice şir convergent de numere reale este mărginit.

(iii) Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Reciprocele afirmaţiilor de mai sus sunt false. Pentru (i) şi (iii), şirul cu termenul general $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}, n \geq 1$, are limita 0, deci este convergent, dar nu este monoton: $x_1 > x_2$, iar $x_2 < x_3$.

Pentru (ii), şirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$, este mărginit, dar nu are limită, deci nu este convergent.

Limite remarcabile

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \ (r > 0) \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n \text{ nu există pentru } q \leq -1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p\right) = \begin{cases} -\infty, & a_0 < 0 \\ +\infty, & a_0 > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} 0, & p < q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ \infty \cdot sign\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right), & p > q \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad (|a| > 1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \ (a \in \mathbb{R}) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^r} = 0 \ (r > 0)$$

Şirul cu termenul general $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ este crescător şi mărginit.

Şirul cu termenul general $E_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ este crescător şi verifică inegalităţile

$$2 < e_n < E_n < e < 3.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

Numărul $e \simeq 2,718\,281...$ este baza logaritmului natural: $\ln e = 1$.

Teorema Cauchy-d'Alembert

Fie (a_n) un şir de numere pozitive. Dacă şirul $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ are limită, atunci şirul $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n\geq 2}$ are limită, iar

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Lema Cesàro-Stolz (cazul $\frac{\infty}{\infty}$)

Fie $(a_n), (b_n)$ două şiruri de numere reale care verifică următoarele condiţii:
(i) şirul (b_n) este strict crescător şi nemărginit;
(ii) există

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l.$$

Atunci şirul cu termenul general $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ are limită şi în plus $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$.

Lema Cesàro-Stolz (cazul $\frac{0}{0}$)

Fie $(a_n), (b_n)$ două şiruri de numere reale care verifică următoarele condiţii:
(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$;
(ii) şirul (b_n) este strict descrescător;
(iii) există

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l.$$

Atunci şirul cu termenul general $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ are limită şi în plus $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$.

Dreapta încheiată $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$

Operaţiile cu limite sugerează prelungirea operaţiilor algebrice din $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ după cum urmează:

$a+\infty=\infty+a$	$=\infty$	$(\forall)\, a \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$
$a+(-\infty)=-\infty+a$	$=-\infty$	$(\forall)\, a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$
$a\cdot\infty=\infty\cdot a$	$=\infty$	$(\forall)\, a \in (0,\infty]$
$a\cdot\infty=\infty\cdot a$	$=-\infty$	$(\forall)\, a \in [-\infty,0)$

$\dfrac{a}{\pm\infty}=0$	$(\forall)\, a\in\mathbb{R}$
$\dfrac{a}{+0}=\infty$	$(\forall)\, a\in(0,\infty]$
$\dfrac{a}{-0}=-\infty$	$(\forall)\, a\in(0,\infty]$

∞^b	$=\begin{cases}\infty, & (\forall)\, b\in(0,\infty)\\ 0, & (\forall)\, b\in(-\infty,0)\end{cases}$	
$(-\infty)^{2k}$	$=\infty$	$(\forall)\, k\in\mathbb{N}^*$
$(-\infty)^{2k+1}$	$=-\infty$	$(\forall)\, k\in\mathbb{N}$
$\sqrt[k]{\infty}$	$=\infty$	$(\forall)\, k\in\mathbb{N}^*,\ k>1$
$\sqrt[2k+1]{-\infty}$	$=-\infty$	$(\forall)\, k\in\mathbb{N}^*$

a^{∞}	$=\begin{cases}0, & (\forall)\, a\in(0,1)\\ \infty, & (\forall)\, a\in(1,\infty]\end{cases}$
$a^{-\infty}$	$=\begin{cases}\infty, & (\forall)\, a\in(0,1)\\ 0, & (\forall)\, a\in(1,\infty]\end{cases}$
0^{∞}	$=0$

Cazuri de nedeterminare (operaţii fără sens)

$\infty+(-\infty)$	$0\cdot\infty$	$\infty\cdot 0$	$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$	0^0	∞^0	$1^{\pm\infty}$
$-\infty+\infty$	$0\cdot(-\infty)$	$(-\infty)\cdot 0$					

Exemple

a) De ce $-\infty+\infty$ este operaţie fără sens?

Dacă $x_n=-n^2+1$ şi $y_n=2n^2+n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ se află în cazul $-\infty+\infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+n+1)=\infty$.

Dacă $x_n=-n^2+\dfrac{1}{n}$ şi $y_n=n^2+1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ se află de asemenea în cazul $-\infty+\infty$, dar, de această dată, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)=1$.

b) De ce 0^0 este operaţie fără sens?

Dacă $x_n=\dfrac{1}{n}$ şi $y_n=\dfrac{1}{n}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}$ se află în cazul 0^0, iar

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1.$$

Dacă $x_n=\dfrac{1}{2^n\cdot n}$ şi $y_n=\dfrac{1}{n}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}$ se află de asemenea în cazul 0^0, dar, de această dată, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^n\cdot n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt[n]{n}}=\dfrac{1}{2}$.

c) De ce 0^{∞} nu reprezintă un caz exceptat?

Oricare ar fi două şiruri $(x_n), (y_n)$ cu $x_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, avem $\lim_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n\to\infty} e^{y_n \cdot \ln x_n} = e^{\infty \cdot \ln(+0)} = e^{\infty \cdot (-\infty)} = e^{-\infty} = 0$.

B. Limite de funcţii şi funcţii continue

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un *punct de acumulare* al acesteia, adică un punct pentru care există un şir $(x_n)_n$ din D, $x_n \neq a$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ *are limita* l (finită sau infinită) *în punctul* a dacă pentru orice şir $(x_n)_n$ din D, $x_n \neq a$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ este verificată egalitatea $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Notăm aceasta prin $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Limita unei funcţii într-un punct (de acumulare al domeniului de definiţie), dacă există, este unică.

Dacă există două şiruri $(x'_n)_n$ şi $(x''_n)_n$ în D, x'_n, $x''_n \neq a$ cu

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = a,$$

dar

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x''_n),$$

atunci funcţia f nu are limită în punctul a.

Exemple

• $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nu există deoarece pentru şirurile $(2n\pi)_n$ şi $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)_n$ ce tind la ∞, şirurile valorilor funcţiei au limite diferite:

$$\lim_{n\to\infty} \sin 2n\pi = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

în timp ce

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

• $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ nu există (se justifică în mod analog, considerând inversele şirurilor folosite mai sus).

Limite laterale:

$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \overset{not}{=} f(a-0)$ (limita la stânga) şi $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \overset{not}{=} f(a+0)$ (limita la dreapta).

Dacă f are limite laterale egale, $f(a-0) = f(a+0) = l$, atunci f are limită în a şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Dacă f are limite laterale diferite, $f(a-0) \neq f(a+0)$, atunci f nu are limită în a, adică $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nu există.

Teoremă

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ două funcţii, a un punct de acumulare al domeniului D, V_a o vecinătate a lui a (un interval centrat în a) şi l un număr real. Dacă

i) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

ii) $|f(x) - l| \leq |g(x)|, \quad (\forall)\, x \in V_a \cap D \setminus \{a\}$

atunci f are limită în a şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Exemplu

Deoarece $\left|x \sin \dfrac{1}{x} - 0\right| = |x| \cdot \left|\sin \dfrac{1}{x}\right| \leq |x| \cdot 1 = |x|, (\forall)\, x \in \mathbb{R}^*$, rezultă $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

Limite remarcabile

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p\right) = a_0 \cdot (\pm\infty)^p$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} 0, & p < q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ \dfrac{a_0}{b_0} (\pm\infty)^{p-q}, & p > q \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} x a^{-x} = 0 \quad (a > 1) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^r}{\ln x} = 0 \quad (r > 0)$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $a \in D$ un *punct de acumulare* al domeniului de definiţie.

Definiţie

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *continuă* în a dacă $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ există şi coincide cu valoarea funcţiei în a, mai precis $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *continuă pe mulţimea* $D_0 \subset D$ dacă este continuă în fiecare punct al mulţimii D_0.

Punctele de acumulare ale domeniului în care funcţia nu este continuă se numesc *puncte de discontinuitate.*

Funcţia f prezintă o *discontinuitate de speţa întâi* în a dacă are limite laterale finite şi diferite în a $(f(a-0) \neq f(a+0))$ sau acestea sunt finite, egale, dar diferite de $f(a)$. Orice punct de discontinuitate care nu este de speţa întâi este clasificat de speţa a doua.

Exemplu

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este discontinuă în $a = 0$; punctul $a = 0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua.

Prelungirea prin continuitate

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi a un punct de acumulare al domeniului D. Dacă

i) a este situat în afara domeniului de definiţie D şi

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \overset{not}{=} l$ există şi este finită,

atunci f se poate extinde în mod natural la $D \cup \{a\}$ prin:

$$\widetilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\ , & x \in D \\ l\ , & x = a \end{cases}.$$

Funcţia $\widetilde{f}$ se numeşte *prelungita prin continuitate a lui f la* $D \cup \{a\}$.

Proprietăţi ale funcţiilor continue

• Orice funcţie continuă pe un interval mărginit şi închis este mărginită şi îşi atinge marginile. Mai precis, oricare ar fi $x \in [a,b]$, $f(x)$ se găseşte în intervalul $[m, M]$ (m şi M reprezintă minimul, respectiv maximul funcţiei) şi, în plus, există $x_m, x_M \in [a,b]$ aşa încât $m = f(x_m)$, respectiv $M = f(x_M)$.

• Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă şi ia valori de semne diferite în capetele intervalului $[a, b]$, atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină în intervalul (a, b).

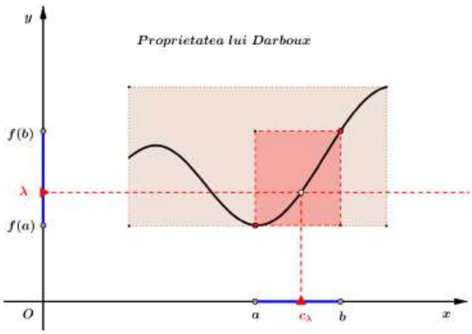
• Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul I, atunci imaginea acestuia $J = f(I)\ (= \operatorname{Im}(f))$ este de asemenea un interval.

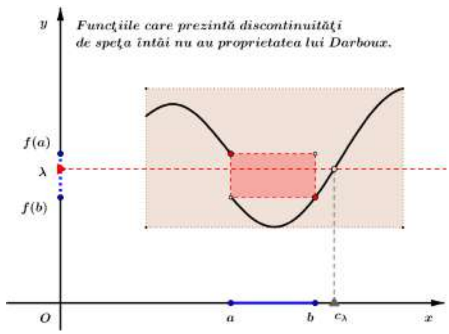
Observaţii asupra proprietăţii lui Darboux

O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ are *proprietatea lui Darboux* pe intervalul I dacă oricare ar fi $a, b \in I$ $(a < b)$ şi λ situat între $f(a)$ şi $f(b)$, există cel puţin un punct $c_\lambda \in (a, b)$ pentru care $\lambda = f(c_\lambda)$.

Orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux.

Funcţiile discontinue care prezintă o discontinuitate de speţa întâi nu au proprietatea lui Darboux.



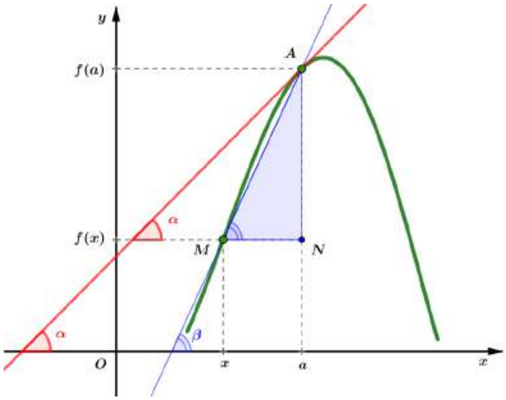


Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux, deşi este discontinuă (discontinuitatea este de speţa a doua!).

C. Funcţii derivabile

Definiţie

O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ este *derivabilă* în punctul a (situat în intervalul I) dacă limita $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{not}{=} f'(a)$ există şi este finită.



Interpretarea geometrică a derivatei

Din punct de vedere geometric, raportul $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ este tangenta unghiului $\widehat{AMN}$ (vezi figura) şi urmare a trecerii la limită după $x \to a$, $f'(a)$ nu reprezintă altceva decât panta tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(a, f(a))$. Cu alte cuvinte, $f'(a)$ este tangenta (trigonometrică a) unghiului pe care dreapta tangentă în punctul A îl face cu semiaxa pozitivă Ox. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă a este

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Uneori, pentru a pune în evidenţă şi variabila independentă a funcţiei, se utilizează notaţiile

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) \quad , \quad f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

O interpretare fizică a derivatei

Un mobil aflat în mişcare rectilinie parcurge în t unităţi de timp (secunde / minute / ore) distanţa $s(t)$ (măsurată în metri / kilometri) sau, cu alte cuvinte, distanţa parcursă de mobil poate fi privită ca o funcţie $s : [0,T] \to \mathbb{R}$. Dacă s este derivabilă pe $[0,T]$, atunci viteza sa la momentul t se defineşte prin $v(t) = s'(t)$, iar dacă şi v este o funcţie derivabilă, atunci acceleraţia mobilului la momentul t este $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Condiţie necesară de derivabilitate

Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproca propoziţiei este falsă: spre exemplu, funcţia modul este continuă în origine fără a fi însă derivabilă.

Cum se studiază derivabilitatea unei funcţii într-un punct?

- se verifică proprietatea de continuitate în punctul precizat (dacă funcţia este discontinuă studiul derivabilităţii nu are sens);
- se calculează derivatele laterale

$$f'_s(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{şi} \quad f'_d(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ .$$

Dacă derivatele laterale în a există, sunt finite şi egale, atunci funcţia f este derivabilă în a. (Pentru punctele situate la extremităţile finite ale domeniului de definiţie este suficient ca una singură din derivatele laterale să existe şi să fie finită). În toate celelalte situaţii, funcţia nu este derivabilă în punctul studiat.

Tabelul derivatelor

Identităţile din tabelele ce urmează se deduc cu formula

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

ce rezultă din definiţie prin schimbarea de variabilă $x - a = h$.

1.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x) = x^n$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(n\in\mathbb{N})$
	$f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\ ,\ f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$(n\in\mathbb{N})$
		$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	
	$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}\ ,\ f(x) = x^r$	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(r\in\mathbb{R})$
		$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
		$(\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	

2.	$f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x$	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a>0, a\neq 1)$
		$(e^x)'=e^x$	
3.	$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(a>0, a\neq 1)$
		$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	
		$(\ln\lvert x\rvert)'=\dfrac{1}{x}$	$(x\neq 0)$
4.	$f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$	
5.	$f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$	
6.	$f:\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
		$(\operatorname{tg} x)'=1+\operatorname{tg}^2 x$	
7.	$f:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$	
8.	$f:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\arcsin x$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(x\neq\pm 1)$
9.	$f:[-1,1]\to[0,\pi]$, $f(x)=\arccos x$	$(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(x\neq\pm 1)$
10.	$f:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$	

Proprietăţi ale funcţiilor derivabile

$$
\begin{aligned}
(cf)'(x) &= cf'(x) && c=\text{constantă}\\
(f+g)'(x) &= f'(x)+g'(x)\\
(f\cdot g)'(x) &= f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}, && g(x)\neq 0\\
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \frac{-g'(x)}{g^2(x)}, && g(x)\neq 0\\
(f\circ u)'(x) &= f'(u(x))\cdot u'(x)\\
(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} && y=f(x), \exists f^{-1} \text{ şi } f'(x)\neq 0
\end{aligned}
$$

Teoremă (derivarea funcţiei inverse) Fie $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă între două intervale.

Dacă f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci inversa $g = f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi, în plus, $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Prin urmare, oricărui punct x din intervalul I îi corespunde un unic punct $y = f(x)$ în intervalul J şi reciproc, oricărui punct y din J îi corespunde în mod unic $x = f^{-1}(y)$ din I; dacă f este continuă pe I şi derivabilă în punctul x_0, cu derivata $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ nenulă, atunci funcţia inversă f^{-1} este şi ea derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi derivata sa în y_0, $\dfrac{df^{-1}}{dy}(y_0)$, se calculează cu ajutorul derivatei lui f în x_0 după cum urmează

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(x_0)}.$$

Această reformulare a egalităţii din enunţul teoremei este mult mai precisă deoarece evidenţiează variabilele de derivare: f se derivează în raport cu $x \in I$, pe când $g = f^{-1}$ se derivează în raport cu $y \in J$.

Dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe intervalul I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe I.

Derivate de ordin superior

O funcţie reală este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ dacă este derivabilă în fiecare punct din I şi, în plus, derivata sa f' este continuă pe I. Mulţimea funcţiilor de clasă $\mathcal{C}^1$ pe I se noteză cu $\mathcal{C}_I^1$, iar $\mathcal{C}_I^0$ desemnează în mod natural clasa funcţiilor continue pe intervalul I.

În general, pentru un indice $n \in \mathbb{N}$ fixat, spunem că f este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^n$ (notaţie $f \in \mathcal{C}_I^n$) dacă f e derivabilă de n ori pe I cu derivata $f^{(n)}$ continuă. Mai mult, spunem că f este de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe I dacă f este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Funcţiile elementare, cum ar fi e^x, $\cos x$, $\sin x$, polinoamele de orice grad, logaritmul (indiferent de bază), sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe domeniul lor maxim de definiţie.

Tabelul derivatelor de ordinul n

$(x^p)^{(n)}$	$=$	$p\,(p-1)\cdots(p-n+1)\,x^{p-n}$	$p\geq n,\quad (p\in\mathbb{N})$
	$=$	0	$p<n,\quad (p\in\mathbb{N})$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}$	$=$	$\dfrac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}}$	$(x\neq 0)$
$(e^x)^{(n)}$	$=$	e^x	
$(\sin x)^{(n)}$	$=$	$\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$(n\in\mathbb{N})$
$(\cos x)^{(n)}$	$=$	$\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$(n\in\mathbb{N})$
$((1+x)^r)^{(n)}$	$=$	$r\,(r-1)\cdots(r-n+1)\,(1+x)^{r-n}$	$(x>-1,\quad r\in\mathbb{R})$

Aplicaţiile derivatei

Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie şi a un punct al domeniului de definiţie D.

Punctul a este *punct de extrem local* pentru f dacă există o vecinătate a sa V_a în care creşterea funcţiei $f(x)-f(a)$ are semn constant; cu alte cuvinte, există $r>0$ a.î.

$$sign\,(f(x)-f(a))=const.\qquad (\forall)\,x\in(a-r,a+r)\cap D.$$

Mai precis,

$$\begin{array}{lll} a \text{ este } \textit{minim local} & \text{d.d.} & f(x)-f(a)\geq 0, \\ a \text{ este } \textit{maxim local} & \text{d.d.} & f(x)-f(a)\leq 0 \end{array}\quad (\forall)\,x\in(a-r,a+r)\cap D.$$

Teorema lui Fermat

Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie şi a un punct din domeniul de definiţie D.

$$\text{Dacă}\begin{cases} a \text{ este punct interior lui } D \\ a \text{ este punct de extrem local} \\ f \text{ este derivabilă în } a \end{cases},\quad \text{atunci}\quad f'(a)=0.$$

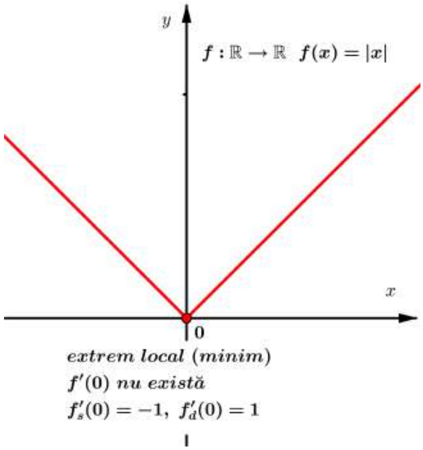
Interpretarea geometrică

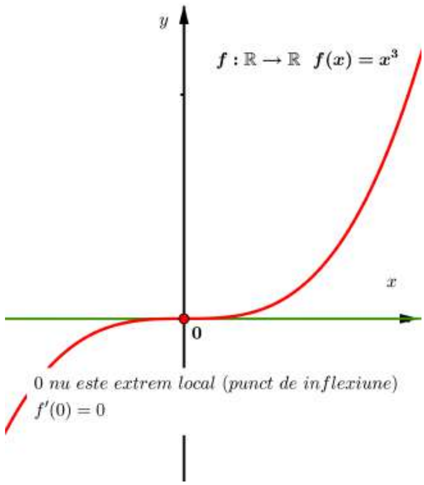
Tangenta la graficul funcţiei într-un punct de extrem local din interiorul domeniului de definiţie al unei funcţii derivabile este paralelă cu axa Ox.

Punctul x_0 este un *punct critic* (*staţionar*) al funcţiei derivabile f dacă $f'(x_0) = 0$.

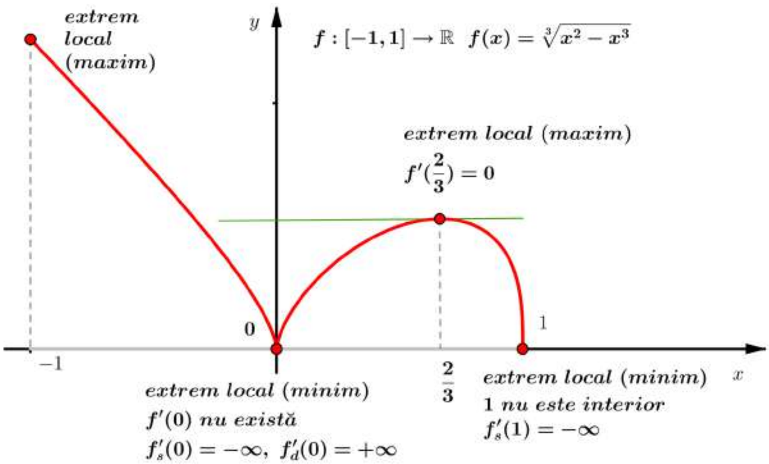
Conform teoremei lui Fermat, punctele de extrem local din interiorul domeniului de definiţie al unei funcţii derivabile se găsesc printre punctele critice ale respectivei funcţii.

Este posibil ca x_0 să fie punct de extrem local, dar funcţia f să nu fie derivabilă în x_0. De asemenea, este posibil ca $f'(x_0) = 0$, dar x_0 să nu fie punct de extrem local al funcţiei f :





Capetele închise ale domeniului de definiţie sunt puncte de extrem local:



Fie funcţia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde I este un interval.

1. Dacă $a \in I$ este punct de extrem local al funcţiei f, atunci punctul $(a, f(a))$ este *punct de extrem local al graficului funcţiei.*

   Fie b un punct situat în interiorul intervalului I; notăm $b \in int(I)$.

2. Punctul $(b, f(b))$ se numeşte *punct unghiular al graficului funcţiei* dacă:

   i) f este continuă în b,

   ii) f are derivate laterale diferite în b $(f'_s(b) \neq f'_d(b))$, cel puţin una dintre ele finită.

3. Punctul $(b, f(b))$ se numeşte *punct de întoarcere al graficului funcţiei* dacă:

   i) f este continuă în b,

   ii) f are derivate laterale în b infinite şi diferite $(f'_s(b) = -\infty,\ f'_d(b) = \infty$ sau $f'_s(b) = \infty,\ f'_d(b) = -\infty)$.

4. Punctul $b \in int(I)$ se numeşte *punct de inflexiune* al funcţiei dacă:

   i) f este continuă în b,

   ii) f are derivată în b, finită sau infinită,

   iii) f îşi schimbă convexitatea[2] în b.

   Punctul $(b, f(b))$ este *punct de inflexiune al graficului funcţiei.*

   În particular, dacă derivatele laterale ale funcţiei sunt infinite şi egale $(f'_s(b) = f'_d(b) = \infty$ sau $f'_s(b) = f'_d(b) = -\infty)$, atunci $(b, f(b))$ este *punct de inflexiune cu tangentă verticală al graficului funcţiei.*

Teorema lui Rolle

$$\text{Dacă } \begin{cases} f \text{ este continuă pe } [a,b] \\ f \text{ este derivabilă pe } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{cases}, \quad \text{atunci} \quad (\exists)\, c \in (a,b) \text{ a.î. } f'(c) = 0.$$

[2]Dacă o funcţie f este derivabilă pe interiorul intervalului I, atunci f este convexă (respectiv concavă) pe $int(I)$ dacă şi numai dacă derivata sa f' este crescătoare (respectiv descrescătoare) pe $int(I)$.

În particular, dacă $f(a) = f(b) = 0$, teorema afirmă că între două rădăcini ale ecuaţiei $f(x) = 0$ există cel puţin o rădăcină a derivatei.

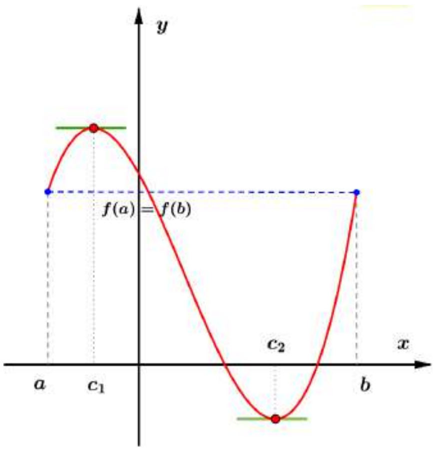
Reciproc, între două rădăcini consecutive ale derivatei, dacă funcţia îşi schimbă semnul, există o singură rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$.

Aplicaţie: Separarea rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = 0$ cu ajutorul şirului lui Rolle

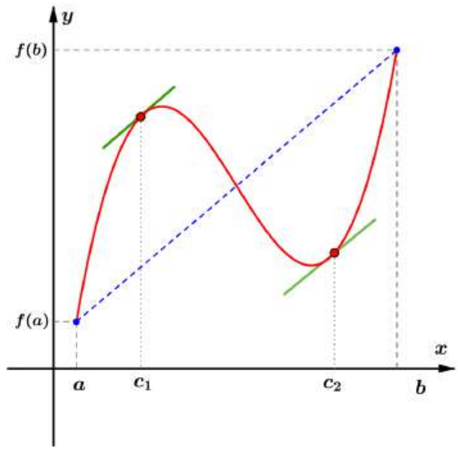
Dacă $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ este continuă şi derivabilă (extremităţile intervalului pot fi infinite) şi $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$ sunt soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0$, atunci orice schimbare a semnului în şirul lui Rolle dat de linia a doua a tabelului

x	a	c_1	$\cdots$	c_k	b
$\text{sign}(f(x))$	$\text{sign}(f(a+0))$	$\text{sign}(f(c_1))$		$\text{sign}(f(c_k))$	$\text{sign}(f(b-0))$

indică intervalele ce conţin câte o rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$.



Teorema lui Rolle



Teorema lui Lagrange

Teorema lui Lagrange

Dacă $\begin{cases} f \text{ este continuă pe } [a, b] \\ f \text{ este derivabilă pe } (a, b) \end{cases}$, atunci $(\exists)\, c \in (a, b)$ a.î.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Interpretarea geometrică

Există cel puţin un punct $(c, f(c))$, situat pe graficul funcţiei, în care tangenta este paralelă cu coarda ce uneşte extremităţile $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$.

Consecinţe

Orice funcţie derivabilă pe un interval cu derivata pozitivă (negativă) este crescătoare (descrescătoare) pe acel interval.

Dacă derivata unei funcţii este nulă pe un interval, atunci funcţia este constantă pe acel interval:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ derivabilă pe } \underline{\text{intervalul}}\ I \subset D$$

$$f'(x) = 0 \quad (\forall)\, x \in I \Rightarrow f(x) = c \text{ (constantă) pe } I.$$

Limite de funcţii (completări)

Calculul limitelor de funcţii conduce cel mai adesea la situaţii exceptate de la regulile de calcul algebric, cum ar fi $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, şi este nevoie de multă îndemânare pentru evitarea lor. În condiţii rezonabile de derivabilitate a termenilor, *regula lui l'Hospital* poate fi de mare ajutor dacă este aplicată corect şi cu discernământ. Pe scurt, *regula lui l'Hospital* reduce calculul limitei $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (a, finit sau infinit) aflată într-una din situaţiile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, la calculul limitei (uneori mai simple) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Mai precis, dacă $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (finit sau infinit), atunci şi $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Altfel spus,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

dacă limita raportului derivatelor există.

Exemple

a) $L = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2 + x - 5)}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$, nedeterminare. Se calculează

$$\lim_{x\to 2} \frac{(\ln(x^2 + x - 5))'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x-5}}{2x} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{2x(x^2 + x - 5)} = \frac{5}{4}.$$

Conform regulii lui l'Hospital, rezultă $L = \frac{5}{4}$.

b) $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 + \sin^2(x^2)}{\ln\left(1+\sin^4 x\right)} = \dfrac{0}{0}$, nedeterminare.

Limita raportului derivatelor este dificil de calculat

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln\left(x^4+\sin^2 x^2\right)\right)'}{\left(\ln\left(1+\sin^4 x\right)\right)'} = \ldots \text{ (dar nu imposibil de calculat).}$$

Este recomandată metoda directă, bazată pe utilizarea limitelor remarcabile evidenţiate mai sus:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + \sin^2(x^2)}{\ln\left(1+\sin^4 x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sin^4 x} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)^2}{\frac{\ln\left(1+\sin^4 x\right)}{\sin^4 x}} = 1 \cdot \frac{1+1^2}{1} = 2.$$

c) $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \dfrac{0}{0}$, nedeterminare. (Am văzut că $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.)

Limita raportului derivatelor nu există

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ nu există.

Totuşi limita există:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

d) $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\infty}{\infty}$, nedeterminare.

Utilizarea (fără discernământ) a regulii lui l'Hospital nu duce la niciun rezultat:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Totuşi limita poate fi calculată cu metoda factorului forţat:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Ghid pentru reprezentarea grafică a funcţiilor

Etapele reprezentării grafice a funcţiilor reale de variabilă reală
$f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ...$

$\boxed{1.}$ *Stabilirea domeniului maxim de definiţie E*

Domeniul maxim de definiţie E este alcătuit din toate numerele reale x pentru care expresia $f(x)$ are sens şi este finită: $E = \{x \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$. Mulţimea E este, de regulă, o reuniune de intervale şi, eventual, de puncte "izolate".

$\boxed{2.}$ *Limitele funcţiei la extremităţile (finite şi/sau infinite) ale intervalelor din E*

Domeniul de continuitate: $E_c = \{x \mid x \in E$ şi f este continuă în $x\}$
este o reuniune de intervale deschise sau închise.

Asimptote verticale:

Fie a o extremitate de interval al domeniului E_c, $a \neq \pm\infty$;
$x = a$ este *asimptotă verticală la stânga* dacă limita laterală $f(a-0)$ este infinită.
$x = a$ este *asimptotă verticală la dreapta* dacă limita laterală $f(a+0)$ este infinită.
$x = a$ este *asimptotă verticală* dacă este asimptotă verticală la sânga sau asimptotă verticală la dreapta.

Asimptote oblice (sau, în particular, *orizontale*) se calculează separat în $-\infty$ şi ∞, dacă acestea sunt extremităţi ale domeniului de definiţie:

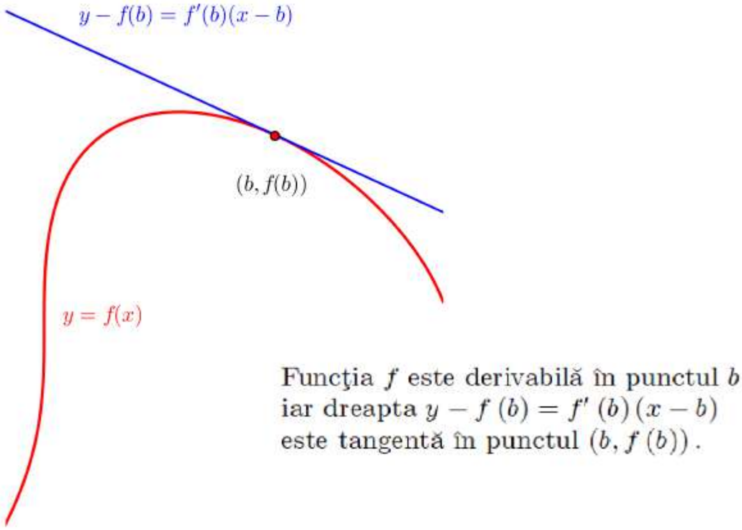
$y = n$ este *asimptotă orizontală* dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = n$ sau $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = n$, cu $n \in \mathbb{R}$.
$y = mx + n$ este *asimptotă oblică* dacă $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ este infinită sau nu există, dar $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ şi $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$ există şi sunt finite, cu $m \neq 0$.

$\boxed{3.}$ *Studiul derivatei întâi*

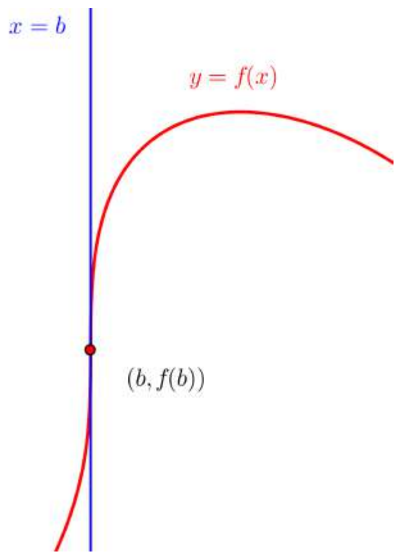
Calculul derivatei întâi $f'(x)$.
Domeniul de derivabilitate este domeniul maxim de existenţă al expresiei $f'(x) \ : \quad E_d = \{x \mid x \in E_c$ şi f este derivabilă în $x\}$.

Practic, pentru precizarea domeniului E_d, se calculează derivatele laterale $f'_s(b)$ şi $f'_d(b)$ în acele puncte b ale domeniului de continuitate E_c în care există dubii asupra existenţei expresiei $f'(x)$.

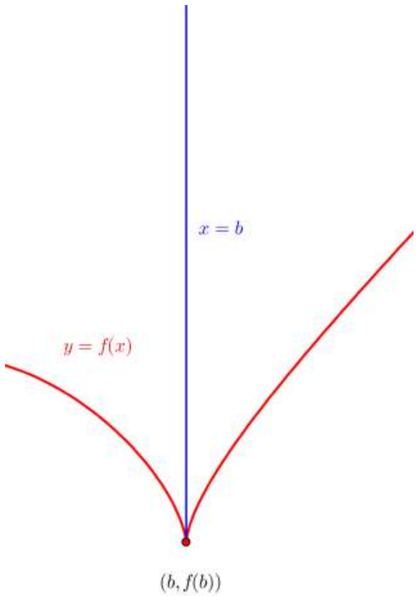
• Dacă $f'_s(b)$ şi $f'_d(b)$ sunt finite şi egale, atunci b aparţine domeniului de derivabilitate E_d.



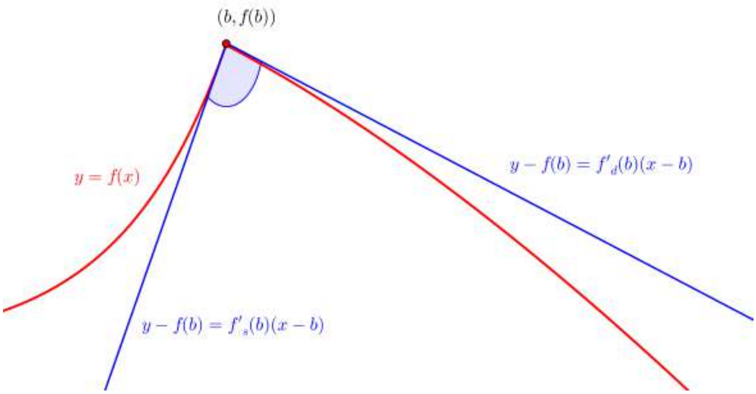
• Dacă $f'_s(b)$ şi $f'_d(b)$ sunt infinite şi egale, atunci f **nu** este derivabilă în b, iar dreapta $x = b$ este tangentă verticală. Punctul $(b, f(b))$ este un *punct de inflexiune cu tangentă verticală* al graficului.



• Dacă $f'_s(b)$ şi $f'_d(b)$ sunt infinite şi diferite, atunci f **nu** este derivabilă în b, $(b, f(b))$ este un *punct de întoarcere* al graficului, iar semidreapta $x = b$ (cu $y \geq f(b)$ sau cu $y \leq f(b)$, după caz) este semitangentă verticală.



• Dacă $f'_s(b)$ şi $f'_d(b)$ sunt finite şi diferite sau cel puţin una dintre derivatele laterale este finită, atunci funcţia **nu** este derivabilă în b, iar $(b, f(b))$ este un *punct unghiular* al graficului.



Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii (zerourile derivatei) se numesc *puncte critice* sau *staţionare* ale funcţiei f.

Importanţa studiului amănunţit al derivatei întâi constă în următoarele:

-*punctele de extrem* ale funcţiei se găsesc printre punctele sale critice, unghiulare sau de întoarcere;

-*semnul* derivatei întâi oferă informaţii despre intervalele de monotonie:

$f'(x) \geq 0$ pe intervalul $I \subset E_d \Rightarrow f$ este crescătoare pe I,

$f'(x) \leq 0$ pe intervalul $I \subset E_d \Rightarrow f$ este descrescătoare pe I.

$\boxed{4.}$ *Studiul derivatei a doua*

Calculul derivatei a doua $f''(x)$.

Precizarea domeniului maxim de existenţă al expresiei $f''(x)$.

Se determină soluţiile ecuaţiei $f''(x) = 0$ (zerourile derivatei a doua).

Punctele de inflexiune ale funcţiei se găsesc printre zerourile derivatei a doua sau printre punctele în care f are derivată (finită sau infinită), dar nu este derivabilă de două ori.

Semnul derivatei a doua stabileşte intervalele pe care funcţia este concavă sau convexă:

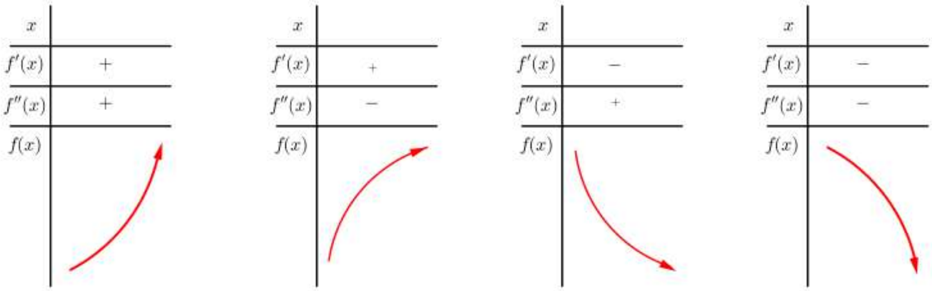
$f''(x) \geq 0$ pe intervalul $I \Rightarrow f$ este convexă pe I,

$f''(x) \leq 0$ pe intervalul $I \Rightarrow f$ este concavă pe I.

Dacă expresia $f'(x)$ are o formă complicată (calculul lui $f''(x)$ ia mult timp) sau ecuaţia $f''(x) = 0$ este dificil de rezolvat, se poate renunţa la studiul derivatei a doua.

$\boxed{5.}$ *Tabelul de variaţie al funcţiei*

x	Se aşază crescător punctele importante determinate mai sus.
$f'(x)$	Se studiază semnul pe fiecare interval evidenţiat la pasul 3.
$f''(x)$	Se studiază semnul pe fiecare interval evidenţiat la pasul 4.
$f(x)$	Pe fiecare interval se trasează săgeţile ce indică monotonia şi forma ramurilor ce alcătuiesc graficul funcţiei, respectând următoarele reguli:



Crescătoare, convexă | Crescătoare, concavă | Descrescătoare, convexă | Descrescătoare, concavă

$\boxed{6.}$ *Valori importante*

Se calculează coordonatele punctelor în care funcţia nu este continuă, nu este derivabilă, ale punctelor critice şi ale punctelor de inflexiune. Valorile găsite se trec în tabelul de variaţie al funcţiei.

Se calculează coordonatele punctelor de intersecţie cu axele:

$\cap Ox: \quad y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ (se reţin doar valorile $x \in E$).

$\cap Oy: \quad x = 0 \Rightarrow y = f(0)$ (doar dacă $0 \in E$).

$\boxed{7.}$ *Reprezentarea grafică*

-se trasează axele de coordonate,
-se stabileşte unitatea de măsură pe fiecare axă în parte,
-se trasează asimptotele şi tangentele verticale,
-se evidenţiază punctele importante ale căror coordonate au fost calculate mai sus,
-se trasează graficul funcţiei conform tabelului de variaţie.

$\boxed{8.}$ *Observaţii*

Se studiază eventualele simetrii ale graficului.

- Dacă f este o funcţie *pară*, adică $f(-x) = f(x)$ $(\forall)\, x \in E$, atunci graficul funcţiei este *simetric faţă de axa Oy*.
- Dacă f este o funcţie *impară*, adică $f(-x) = -f(x)$ $(\forall)\, x \in E$, atunci graficul funcţiei este *simetric faţă de origine*.

Se studiază periodicitatea.

Funcţia f este *periodică cu perioada* T dacă $f(x+T) = f(x)\quad (\forall)\, x \in E$; cel mai mic număr pozitiv T cu această proprietate (dacă există) se numeşte *perioada principală*.

Se determină imaginea funcţiei: $\mathrm{Im} f = \{y \mid (\exists)\, x \in E \text{ a.î. } y = f(x)\}$.

Exemplul 1 Reprezentarea grafică a funcţiei

$$f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x\,|x|}{3x-10}.$$

$\boxed{1.}$ *Domeniul maxim de definiţie* $E = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{10}{3}\right\}$

Numitorul fracţiei trebuie să fie diferit de zero: $3x - 10 \neq 0$, prin urmare $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{10}{3}\right\}$.

$\boxed{2.}$ *Limitele funcţiei la extremităţile (finite şi infinite) ale intervalelor din E*

Domeniului de continuitate: $E_c = E = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{10}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right) \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$, deoarece f este compusă de funcţii continue; prin explicitarea modulului, expresia sa devine

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{3x-10} & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{x^2}{3x-10} & , \quad x \in \left[0, \frac{10}{3}\right) \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right) \end{cases}$$

Funcţia f este *continuă* în $x = 0$ deoarece $f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 0$.

Limitele laterale în punctul de abscisă $\frac{10}{3}$ sunt

$$f\left(\frac{10}{3} - 0\right) = \frac{\frac{100}{9}}{0_-} = -\infty, f\left(\frac{10}{3} + 0\right) = \frac{\frac{100}{9}}{0_+} = +\infty.$$

Dreapta $x = \dfrac{10}{3}$ este *asimptotă verticală* la graficul funcţiei (atât la stânga, cât şi la dreapta).

Limitele la $\pm\infty$ sunt infinite şi diferite:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{3x-10} = \frac{-1}{3}(-\infty)^1 = +\infty$,
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{3x-10} = \frac{1}{3}(+\infty)^1 = +\infty$,
prin urmare nu există asimptote orizontale.
Existenţa asimptotelor oblice se studiază pe fiecare ramură în parte.

$y = mx + n$

$m_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2}{(3x-10)\,x} = -\dfrac{1}{3}$,

$n_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - m_1 x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-x^2}{3x-10} + \dfrac{1}{3}x \right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^2 + 3x^2 - 10x}{3(3x-10)} = -\dfrac{10}{9}$,

$m_2 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{(3x-10)\,x} = \dfrac{1}{3}$,

$n_2 = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - m_2 x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{3x-10} - \dfrac{1}{3}x \right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2 - 3x^2 + 10x}{3(3x-10)} = \dfrac{10}{9}$.

Dreapta $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{10}{9}$ este *asimptotă oblică la ramura spre* $-\infty$.

Dreapta $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{9}$ este *asimptotă oblică la ramura spre* $+\infty$.

$\boxed{3.}$ *Studiul derivatei întâi*

Pentru început se calculează

$$\left(\frac{x^2}{3x-10} \right)' = \frac{2x(3x-10) - 3x^2}{(3x-10)^2} = \frac{3x^2 - 20x}{(3x-10)^2};$$

rezultă expresia derivatei întâi

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2 + 20x}{(3x-10)^2} & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{3x^2 - 20x}{(3x-10)^2} & , \quad x \in \left[0, \frac{10}{3}\right) \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right) \end{cases}$$

Funcţia f este derivabilă în punctul $x = 0$ deoarece $f'_s(0) = f'_d(0) = 0$. *Domeniului de derivabilitate* coincide cu domeniul maxim de definiţie E. Punctele critice ale funcţiei f sunt rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$, adică $3x^2 - 20x = 0$. Rezultă $x = 0$ şi $x = \dfrac{20}{3}$.

$\boxed{4.}$ *Studiul derivatei a doua*

Din

$$\left(\frac{3x^2-20x}{(3x-10)^2}\right)' = \frac{200}{(3x-10)^3}$$

rezultă expresia derivatei a doua

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-200}{(3x-10)^3} & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{200}{(3x-10)^3} & , \quad x \in \left(0, \frac{10}{3}\right) \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right) \end{cases}.$$

Funcţia f nu este derivabilă de două ori în $x = 0$ deoarece derivatele laterale sunt diferite: $f_s''(0) = \dfrac{1}{5}$, iar $f_d''(0) = -\dfrac{1}{5}$.

Ecuaţia $f''(x) = 0$ nu are soluţie.

$\boxed{5.}$ *Tabelul de variaţie al funcţiei*

x	$-\infty$		0		$\frac{10}{3}-0$	$\frac{10}{3}+0$		$\frac{20}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$			$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$\vert$	$-$			$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		0		$-\infty$	$+\infty$		$\frac{40}{9}$		$+\infty$
		$\searrow$	inflexiune	$\searrow$			$\searrow$	min	$\nearrow$	

$\boxed{6.}$ *Valori importante*

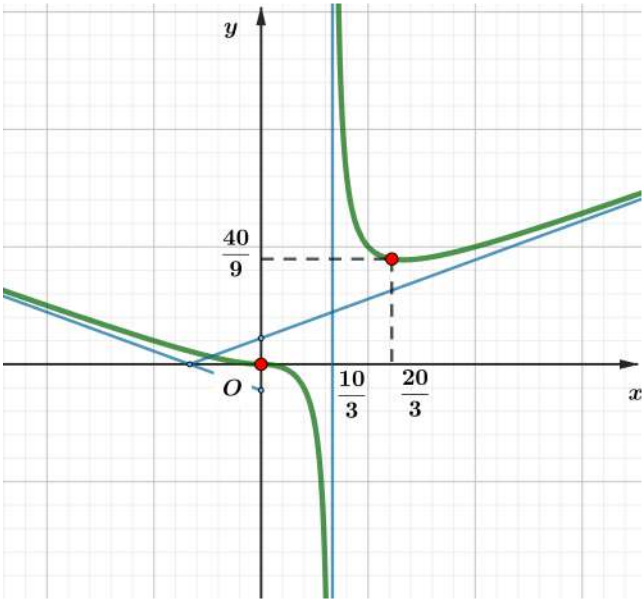
$f(0) = 0, \;\; f\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{40}{9}$

Coordonatele punctelor de intersecţie cu axele:

$$\cap\, Ox: \qquad y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x\,|x|}{3x-10} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\cap\, Oy: \qquad x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0.$$

$\boxed{7.}$ *Reprezentarea grafică*



$\boxed{8.}$ *Observaţie* Imaginea funcţiei: $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

Exemplul 2 Reprezentarea grafică a funcţiei

$$f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}.$$

$\boxed{1.}$ *Domeniul maxim de definiţie* $E = \mathbb{R}$

$\boxed{2.}$ *Limitele funcţiei la extremităţile (finite/infinite) ale intervalelor din* E

Domeniului de continuitate: $E_c = E = \mathbb{R}$ deoarece f este compusă de funcţii continue.

Limitele la $\pm\infty$ sunt infinite:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{6x^2 - x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = \mp\infty,$

prin urmare nu există asimptote orizontale.

Existenţa asimptotei oblice:

$y = mx + n,$

$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = -1,$

$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x\right)$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2} - x\sqrt[3]{6x^2-x^3} + x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(\frac{6}{x}-1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{6}{x}-1} + 1\right)} = 2.$

Dreapta $y = -x + 2$ este *asimptotă oblică* la graficul funcţiei, atât spre $-\infty$, cât şi spre ∞.

$\boxed{3.}$ *Studiul derivatei întâi*

$f'(x) = \frac{12x-3x^2}{3\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}} = \frac{x(4-x)}{\sqrt[3]{x^4(6-x)^2}} = \frac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}$ unde $x \neq 0$ şi $x \neq 6$.

Se studiază derivabilitatea în punctele $x = 0$ şi $x = 6$.

$f'_s(0) = \frac{4}{\sqrt[3]{0_- \cdot 36}} = -\infty$ şi $f'_d(0) = \frac{4}{\sqrt[3]{0_+ \cdot 36}} = +\infty$

Funcţia f nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

Dreapta $x = 0$ este *tangentă verticală* la stânga şi la dreapta la graficul funcţiei.

Punctul $(0, f(0)) = (0, 0)$ este *punct de întoarcere* al graficului.

$f'_s(6) = \frac{-2}{\sqrt[3]{6 \cdot (0_+)^2}} = -\infty$ şi $f'_d(6) = \frac{-2}{\sqrt[3]{6 \cdot (0_-)^2}} = -\infty$

Funcţia f nu este derivabilă în punctul $x = 6$.

Dreapta $x = 6$ este *tangentă verticală* la graficul funcţiei.

Punctul $(6, f(6)) = (6, 0)$ este *punct de inflexiune* al graficului.

În concluzie, *domeniului de derivabilitate* al funcţiei este $E_d = \mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$.

Punctul critic ale funcţiei f este soluţia ecuaţiei $f'(x) = 0$: $x = 4$.

$\boxed{4.}$ *Studiul derivatei a doua*

$$f''(x) = \frac{-\sqrt[3]{x(6-x)^2} - (4-x)\frac{(6-x)^2 + x2(6-x)(-1)}{3\sqrt[3]{x^2(6-x)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(6-x)^4}} = \frac{-3x(6-x)^2 - (4-x)(6-x)(6-3x)}{3\sqrt[3]{x^4(6-x)^8}} =$$

$$= \frac{-3(6-x)(x(6-x) + (4-x)(2-x))}{3x(6-x)^2\sqrt[3]{x(6-x)^2}} = \frac{-\left(6x - x^2 + 8 - 2x - 4x + x^2\right)}{x(6-x)\sqrt[3]{x(6-x)^2}} = \frac{-8}{x(6-x)\sqrt[3]{x(6-x)^2}}.$$

Ecuaţia $f''(x) = 0$ nu are soluţie.

$\boxed{5.}$ *Tabelul de variaţie al funcţiei*

x	$-\infty$		0		4		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$f''(x)$		$-$	|	$-$		$-$	|	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		0		$2\sqrt[3]{4}$		0		$-\infty$
			întoarcere		max		inflexiune		

$\boxed{6.}$ *Valori importante*

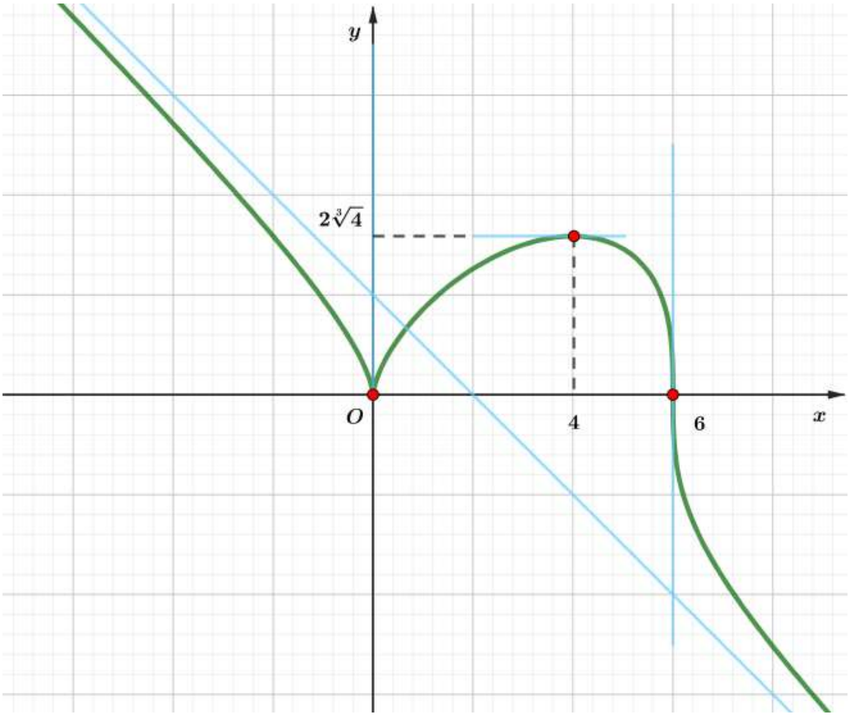
$f(0) = 0, \quad f(4) = 2\sqrt[3]{4}, \quad f(6) = 0$

Coordonatele punctelor de intersecţie cu axele:

$\cap Ox: \quad y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x^2 - x^3} = 0 : x = 0,\ x = 6.$

$\cap Oy: \quad x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0.$

$\boxed{7.}$ *Reprezentarea grafică*



$\boxed{8.}$ *Observaţie* Imaginea funcţiei: $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

D. Integrabilitate şi aplicaţii

Definiţie

Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$, interval) este *primitivabilă* dacă există o funcţie $F : I \to \mathbb{R}$, numită *primitiva* lui f, având proprietăţile:

(i) F este derivabilă pe I

(ii) $F'(x) = f(x), (\forall)x \in I$.

Mulţimea tuturor primitivelor lui f este notată prin $\displaystyle\int f(x)\,dx$, ce se citeşte "*integrala nedefinită a lui f în raport cu x*". Întrucât orice două primitive ale aceleaşi funcţii primitivabile diferă printr-o constantă (f este definită pe un interval !), pentru determinarea integralei nedefinite este suficientă găsirea unei singure primitive F. Are loc egalitatea de mulţimi

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C}$ reprezintă mulţimea funcţiilor reale constante definite pe I.

Proprietatea (ii) din definiţie permite alcătuirea unui tabel cu integrale nedefinite a cărui consultare atentă reprezintă o primă metodă de primitivare. În plus, din (ii) rezultă şi proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx,$$

oricare ar fi $f, g : I \to \mathbb{R}$, primitivabile şi α, β numere reale.

Tabelul primitivelor elementare[3]

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq (0, \infty), \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + \mathcal{C}\,, \quad \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq (0, \infty)$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq (0, \infty)$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}\,, a > 0$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathcal{C}, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln |\cos x| + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

[3] I reprezintă intervalul de integrare.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\,\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq (-\infty,-a)\cup(a,+\infty)\,, a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + \mathcal{C}, \qquad x \in I \subseteq (-a,a)\,, a > 0$$

În practică îşi dovedesc utilitatea şi următoarele trei formule de integrare, ce se pot verifica imediat prin derivarea membrului drept:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} + \mathcal{C}; \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} + \mathcal{C};$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2} + \mathcal{C}, a > 0.$$

Problema A

Cum se poate decide dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$, *interval*) *este sau nu primitivabilă?*

Direct, problema poate fi rezolvată intuind (de exemplu cu ajutorul tabelului) forma pe care ar trebui s-o aibă primitiva F şi verificând dacă sunt sau nu îndeplinite condiţiile (i) şi (ii) din definiţie.

Posibilitatea rezolvării indirecte a problemei **A** se bazează pe următoarele rezultate:

• Orice funcţie reală continuă pe intervalul $D \subseteq \mathbb{R}$ este primitivabilă pe D.

• Dacă f este o funcţie reală primitivabilă pe intervalul $D \subseteq \mathbb{R}$, atunci din identitatea $f = F'$ rezultă imediat că f are proprietatea lui Darboux pe D.

a) Dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul D, atunci f nu este primitivabilă pe D.

b) Dacă f are în punctul x_0 al intervalului D o discontinuitate de speţa I (adică limitele laterale $f(x_0-0)$ şi $f(x_0+0)$ sunt finite, dar diferite), atunci f nu este primitivabilă pe D.

Astfel, pentru a dovedi primitivabilitatea unei funcţii este suficient (nu şi necesar) să se verifice continuitatea sa, ceea ce este mult mai comod în comparaţie cu verificarea condiţiilor (i) şi (ii) ale definiţiei.

Pentru a dovedi neprimitivabilitatea unei funcţii este suficient (nu şi necesar) să se verifice că f nu posedă proprietatea lui Darboux, adică faptul că există un interval $D_0 \subset D$ a cărui imagine prin f,

$$f(D_0) = \{y \mid y \in \mathbb{R},\ (\exists)x_0 \in D_0 : y = f(x_0)\} ,$$

nu este interval.

Problema B

Cum poate fi determinată integrala nedefinită $\mathcal{I} = \int f(x)\,dx$ *a funcţiei primitivabile* $f : D \to \mathbb{R}$ *(*$D \subseteq \mathbb{R}$, *interval)?*

O primă metodă o constituie, aşa cum remarcam înainte, consultarea atentă a tabelului cu primitivele unor funcţii elementare. Descriem în continuare câteva procedee de calcul a integralei nedefinite utile în rezolvarea problemelor.

Metode de integrare

METODA INTEGRĂRII PRIN PĂRŢI

Dacă f se poate exprima sub forma

$$f(x) = u(x) \cdot v'(x)$$

cu $u, v : D \to \mathbb{R}$ derivabile cu derivate continue, atunci

$$\mathcal{I} = \int f(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx = ... = F(x) + C$$

(cu alte cuvinte, calculul integralei iniţiale $\int u(x) \cdot v'(x)\,dx$ se reduce la cel al integralei $\int u'(x) \cdot v(x)\,dx$ care, la o alegere judicioasă a funcţiilor u şi v, poate fi mai simplă).

METODA SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ (1)

Dacă f se poate exprima sub forma:

$$f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

unde $\varphi : D \to E$ ($E \subseteq \mathbb{R}$ interval) este derivabilă, iar $g : E \to \mathbb{R}$ este primitivabilă cu primitiva G, atunci calculul integralei nedefinite

$$\mathcal{I} = \int f(x)\,dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx,$$

prin schimbarea de variabilă $t = \varphi(x)$, se reduce la calculul integralei nedefinite:

$$\mathcal{I}_t = \int g(t)\,dt = ... = G(t) + C$$

şi în final

$$\mathcal{I} = G(\varphi(x)) + C.$$

METODA SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ (2)

Dacă $\Psi : E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R},$ interval) este bijectivă şi derivabilă iar $(f \circ \Psi) \cdot \Psi'$ este primitivabilă pe E cu primitiva H, atunci calculul integralei nedefinite

$$\mathcal{I} = \int f(x)\,dx$$

se reduce prin schimbarea de variabilă (substituţia) $x = \Psi(t)$ la cel al integralei

$$\mathcal{I}_t = \int f(\Psi(t)) \cdot \Psi'(t)dt = ... = H(t) + C,$$

iar în final, revenind la variabila iniţială (în baza bijectivităţii lui Ψ, $t = \Psi^{-1}(x)$), se obţine:

$$\mathcal{I} = H(\Psi^{-1}(x)) + C.$$

Substituţii remarcabile

Utilizarea formei canonice a trinomului de gradul al-II-lea

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{4a}{4a}\left(ax^2 + bx + c\right) = \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2 + 4abx + 4ac\right) = \\ &= \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)^2 - \Delta\right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_x = \int f\left(ax^2+bx+c\right)\,dx \quad \text{cu } f \text{ integrabilă}$$

$$t = 2ax+b \Rightarrow \mathcal{I}_t = \frac{1}{2a}\int g(t)\,dt, \quad \text{unde} \quad g(t) = f\left(\frac{t^2-\Delta}{4a}\right).$$

Primitivarea funcţiilor raţionale

$$\mathcal{I} = \int R(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

$$\begin{array}{lll}
grP \geq grQ \Rightarrow & R = & C + \dfrac{\rho}{Q}\ (\rho,\text{restul}) \Rightarrow \mathcal{I} = \int C(x)\,dx + \int \dfrac{\rho(x)}{Q(x)}\,dx \\
grP < grQ \Rightarrow & Q & \text{se descompune în produs de factori} \\
 & & \text{de gr.I şi II la diverse puteri} \\
 & R = & \dfrac{P}{Q}\ \text{se descompune în fracţii simple de forma} \\
 & & \dfrac{A}{(ax+b)^n}\ ,\ \text{respectiv}\ \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m}\ (cu\ \Delta < 0)\,, \\
 & & \text{care se vor primitiva fiecare în parte}
\end{array}$$

Substituţii trigonometrice pentru eliminarea radicalului

$$\begin{array}{lcl}
\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)\,dx & : & x = a\cdot\sin t \\
\int f\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)\,dx & : & x = a\cdot\operatorname{tg} t \\
\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)\,dx & : & x = \dfrac{a}{\cos t}
\end{array}$$

Substituţiile lui Euler

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx, \qquad R \text{ raţională}$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow & t \pm \sqrt{a}x = \sqrt{ax^2+bx+c} \\ \Delta > 0 \Rightarrow & t = \sqrt{a\dfrac{x-x_1}{x-x_2}} \end{cases}$$

Integrale reductibile la integrale de funcţii raţionale

$$\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx, \qquad R \text{ raţională}$$

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{unde } m = [p, .., q]$$

reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor $p, ..., q$.

$$\int R\left(e^x\right) dx, \quad R \text{ raţională } \; : \; t = e^x$$

$$\int R\left(\cos x, \sin x\right) dx, \quad R \text{ raţională } \begin{cases} & t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ R\left(u, -v\right) = -R\left(u, v\right) \Rightarrow & t = \cos x \\ R\left(-u, v\right) = -R\left(u, v\right) \Rightarrow & t = \sin x \\ R\left(-u, -v\right) = R\left(u, v\right) \Rightarrow & t = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Precizăm în încheiere că alegerea schimbării de variabilă ţine de imaginaţia şi experienţa rezolvitorului care poate aborda o aceeaşi problemă prin două sau chiar mai multe modalităţi. Este interesant să comparaţi în asemenea situaţii rezultatele obţinute şi să explicaţi diferenţele remarcate. De asemenea, este util ca la integralele nedefinite întâlnite să reflectaţi asupra intervalelor maxime pe care sunt definite funcţiile de sub semnul integralei.

Construcţia integralei definite

Oricărei funcţii $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i se poate ataşa un număr real σ_f după cum urmează:

- se construieşte o *diviziune* a intervalului de definiţie:

$$(\Delta) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

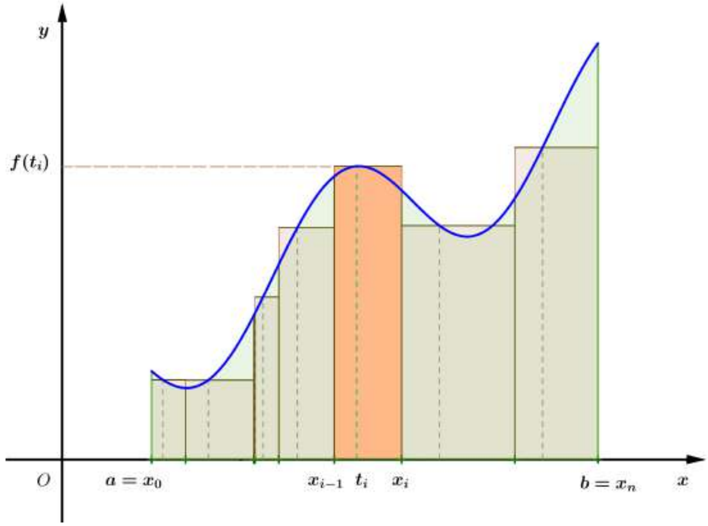
- se alege un *sistem de puncte intermediare* diviziunii:

$$(\tau) \ \ \{t_1, t_2, ..., t_i, ..., t_n\}, \qquad t_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (i = \overline{1, n}),$$

- se defineşte

$$\sigma_f(\Delta, \tau) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Numărul $\sigma_f(\Delta, \tau)$ se numeşte *suma integrală Riemann* a lui f relativ la diviziunea (Δ) şi sistemul de puncte intermediare (τ). Din punct de vedere geometric, pentru funcţii pozitive, acest număr reprezintă o aproximare a ariei "de sub grafic".



Definiţie

Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este *integrabilă* (în sens Riemann)dacă există un număr real $\mathbb{I}$ care verifică următoarea proprietate:

"pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ aşa încât
oricare ar fi diviziunea (Δ) cu norma $\mu(\Delta) := \max\limits_i (x_i - x_{i-1}) < \delta_\varepsilon$ şi
oricare ar fi sistemul de puncte (τ), intermediare diviziunii $(\triangle)$,
are loc inegalitatea $|\sigma_f(\Delta, \tau) - \mathbb{I}| < \varepsilon$".

Numărul $\mathbb{I}$, dacă există, se notează $\int_a^b f(x)\, dx$ şi reprezintă "*integrala definită a funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ în raport cu variabila x*".

În cazul particular al partiţiei uniforme cu norma $\dfrac{b-a}{n}$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{n}\right) = \int\limits_a^b f\,(x)\; dx.$$

Problema C

Cum se poate decide dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este sau nu integrabilă?

Utilizarea definiţiei, deşi incomodă, este uneori inevitabilă.

Următoarele rezultate sunt utile pentru evitarea definiţiei în studiul integrabilităţii:

• Oricare funcţie integrabilă pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$.
• Funcţiile reale nemărginite nu sunt integrabile.
• Orice funcţie reală monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.
• Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, iar punctele de discontinuitate x_i $(i = \overline{1, k})$ sunt toate de speţa întâi ($f(x_i - 0)$ şi $f(x_i + 0)$ există, sunt finite, dar diferite), atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Problema D

Cum poate fi calculată integrala definită $\mathcal{I} = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$?

Pentru a calcula integralele este bine să cunoaşteţi:
a) *Proprietatea de liniaritate:*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

b) *Proprietatea de aditivitate la interval:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$$

unde g este integrabilă, iar $c \in (a, b)$.

Formula lui Leibniz-Newton

Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrablă şi primitivabilă, iar F este o primitivă a sa, atunci

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Există funcţii integrabile care nu sunt primitivabile ceea ce face ca formula să nu poată fi aplicată. Un caz aparte, în care nu se poate utiliza (direct) formula, este acela al integralei unei funcţii, integrabile şi primitivabile, a cărei primitivă nu este exprimabilă prin funcţii elementare. Asemenea funcţii sunt e^{-x^2}, $\cos x^2$, $\dfrac{\sin x}{x}$.

METODE DE INTEGRARE

Integrarea prin părţi se aplică dacă $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ dx = ...$$

Schimbarea de variabilă (1) se aplică dacă $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$:

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\ dx$$

$$t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x)\ dx$$

$$x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \quad \text{şi} \quad x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$$

$$\mathcal{I} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\, dt = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a))$$

Schimbarea de variabilă (2) se aplică dacă $f(x)$ are o formă specială (vezi lista substituţiilor remarcabile):

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\ dx$$

$$t = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(t) \qquad (\psi = \varphi^{-1})$$

$$x = \psi(t) \Rightarrow\ dx = \psi'(t)\, dt$$

$$x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \quad \text{şi} \quad x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$$

$$\mathcal{I} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\, dt = H(\varphi(b)) - H(\varphi(a))$$

Proprietăţile integralei definite

Teoremă

Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci

i) f este integrabilă pe $[a, b]$,

ii) f este primitivabilă pe $[a, b]$, iar $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ este o primitivă a lui f.

Pentru orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

Observaţie
Integrarea şi derivarea sunt operaţii "*inverse*" una celeilalte în sensul că

$$\int g'(x)\,dx = g(x) + \mathcal{C} \quad \text{şi} \quad \left(\int_a^x g(t)dt\right)'_x = g(x).$$

Teoremă
Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Dacă

$$f(x) \leq g(x), \quad (\forall)x \in [a, b],$$

atunci

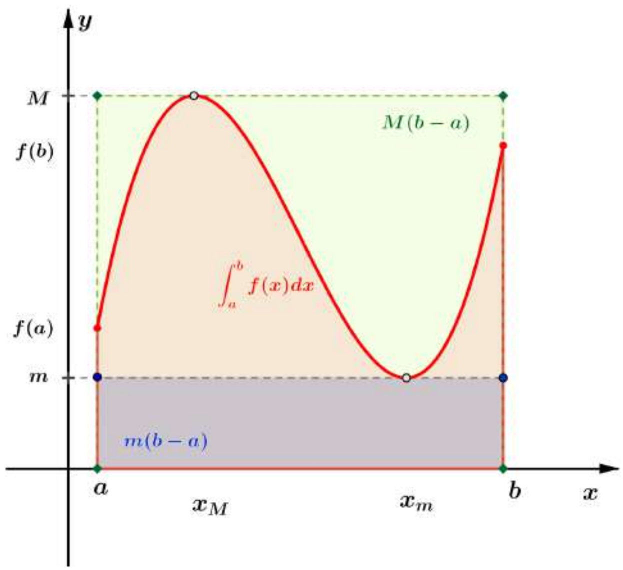
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teoremă
Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

atunci

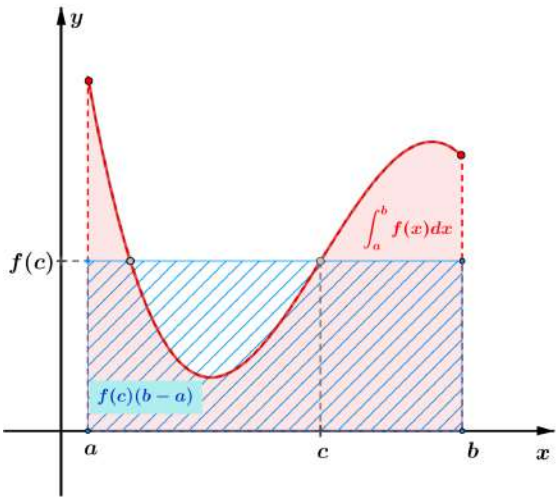
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$



Teoremă (formula de medie)

Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci există un punct c situat între a şi b aşa încât

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$



Numărul $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se numeşte *valoarea medie a funcţiei f pe intervalul $[a,b]$*.

Teoremă

Fie $a\in(0,\infty)$ şi $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă.

(i) Dacă f este funcţie pară, atunci

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

(ii) Dacă f este funcţie impară, atunci

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

Aplicaţii ale integralei definite în geometrie

i) *Aria domeniului mărginit cuprins între graficul unei funcţii pozitive şi axa Ox*

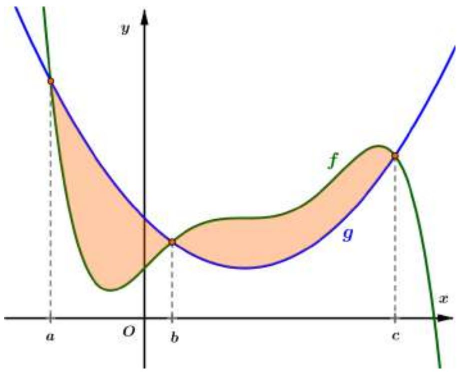
Fie funcţia continuă $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă f este pozitivă pe intervalul $(a, b) \subset I$, atunci aria domeniului delimitat de axa Ox, dreptele $x = a, x = b$ şi porţiunea de grafic cuprinsă între aceste drepte este

$$A_f = \int_a^b f(x)\, dx.$$

ii) *Aria domeniilor mărginite cuprinse între graficele a două funcţii*

Două funcţii continue $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ale căror grafice se intersectează în punctele de abscise $a < b < c$, determină un domeniu mărginit a cărui arie este

$$A_{f,g} = \int_a^c |g\,(x) - f\,(x)|\; dx.$$



De exemplu, în cazul figurii de mai sus, avem

$$A_{f,g} = \int_a^b (g(x) - f(x))\; dx + \int_b^c (f(x) - g(x))\; dx.$$

Exemplu

Aria discului circular de rază r (centrat în origine):

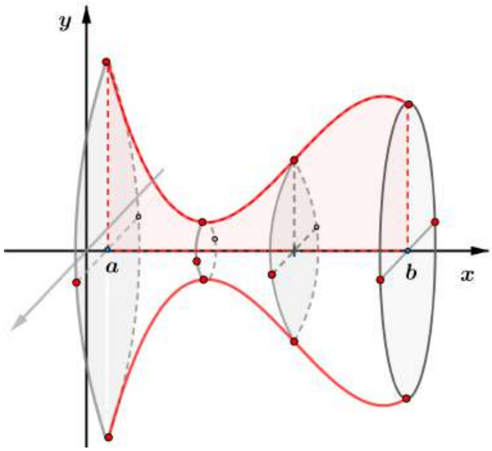
$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} = \left\{(x, y) \mid -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\right\}$$

$$\begin{aligned} Aria\,(D) &= \int_{-r}^{r} \left| \sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2} \right) \right| \, dx = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\ &= 4 \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \left(2r^2 \arcsin \frac{x}{r} + 2x\sqrt{r^2 - x^2} \right) \Big|_{0}^{r} = \pi r^2. \end{aligned}$$

iii) *Volumul corpurilor generate prin rotirea graficului funcţiei în jurul axei* Ox

Dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci corpul generat prin rotirea porţiunii de grafic cuprinsă între punctele $x = a$ şi $x = b$ în jurul axei Ox are volumul

$$V_f = \pi \int_{a}^{b} f^2\,(x)\; dx.$$



PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)

AL 1 Să se calculeze $\{3,3\}+\{-3,3\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

a) 0 b) $0,3$ c) $0,6$ d) $6,6$ e) 1 f) -1

AL 2 Fie $A=(\sqrt{2},100-\sqrt{2})$ şi $B=(\sqrt{5},100+\sqrt{5})$. Câte numere naturale conţine mulţimea $A\cap B$?

a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 197 f) o infinitate

AL 3 Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei $|x|+|x+2|=3$.

a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2 f) 3

AL 4 Câte numere întregi se găsesc în mulţimea $A=\{x\in\mathbb{R},\ |2x-3|\leq 6\}$?

a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6 f) 5

AL 5 Să se determine mulţimea valorilor lui x pentru care

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\geq 0.$$

a) $(-\infty,-1)\cup[0,1)$ b) $(-\infty,-1)$ c) $\mathbb{R}$

d) $\varnothing$ e) $(1,+\infty)$ f) $(-\infty,-2)$

AL 6 Andrei şi Cristian joacă un joc în care persoana care pierde o rundă îi dă celuilalt jumătate din punctele pe care le are în acel moment. Ei încep jocul cu $4a$, respectiv $4c$ puncte. Dacă Andrei câştigă prima rundă, iar Cristian o câştigă pe a doua, câte puncte are Cristian la sfârşitul celei de-a doua runde?

a) $2c$ b) $2c + a$ c) $2a + c$ d) $3c + a$ e) $3c + 2a$ f) $2c + 2a$

AL 7 Dacă $a = b \cdot c^2$, c scade cu 20%, iar a rămâne constant, cu ce procent creşte b?

a) $56,25\%$ b) 40% c) 20% d) $0,025\%$ e) $0,5\%$ f) 60%

AL 8 Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{[x]} ,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[k, k + \frac{1}{k}\right]$ c) $\{n^2, n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\}$

d) $\{1\}$ e) $[0, 1]$ f) $(0, 1)$

AL 9 Să se calculeze suma soluţiilor ecuaţiei

$$\left[\frac{5 + 6x}{8}\right] = \frac{15x - 7}{5} .$$

a) $\frac{19}{15}$ b) $\frac{20}{15}$ c) $\frac{14}{15}$ d) 1 e) $\frac{13}{15}$ f) $\frac{10}{15}$

AL 10 Să se calculeze media aritmetică a soluţiilor ecuaţiei

$$[x] + [2x] + [3x] = 4x.$$

a) 0 b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{7}{16}$ f) 1

AL 11 Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$[a]^2 - (2a-1)[a] + 3a = 0.$$

a) $[-1,4] \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ b) $[0,4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ c) $[0,5)$

d) $\{-3,-2,0,4,5\}$ e) $(-1,4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ f) $\{0,4\}$

AL 12 Care dintre următoarele variante reprezintă negaţia propoziţiei

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \ ?$$

a) $\forall \varepsilon > 0, \nexists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

b) $\nexists \varepsilon > 0, \nexists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$

d) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : |x - x_0| \geq \eta$ şi $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

e) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$

f) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : |x - x_0| < \eta$ şi $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

AL 13 A demonstra prin contrapoziţie propoziţia $p \to q$ înseamnă a demonstra că este adevărată implicaţia $\bar{q} \to \bar{p}$. Care dintre enunţurile de mai jos trebuie argumentat pentru a demonstra, folosind şi contrapoziţia, proprietatea

$$\forall\ m \in M, \quad \forall\ n \in N, \quad p(m,n) \wedge q(m,n) \ \to \ r(m,n) \ \ ?$$

a) $\forall\ m \in M, \quad \forall\ n \in N, \quad \bar{r}(m,n) \ \to \ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

b) $\exists\ m \in M, \quad \exists\ n \in N, \quad \bar{r}(m,n) \ \to \ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

c) $\exists\ m \in M, \quad \exists\ n \in N, \quad \bar{r}(m,n) \ \to \ \bar{p}(m,n) \wedge \bar{q}(m,n)$

d) $\forall\ m \in M, \quad \exists\ n \in N, \quad \bar{r}(m,n) \ \to \ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

e) $\forall\ m \in M, \quad \forall\ n \in N, \quad \bar{r}(m,n) \ \to \ \bar{p}(m,n) \wedge \bar{q}(m,n)$

f) $\exists\ m \in M, \quad \forall\ n \in N, \quad \bar{r}(m,n) \ \to \ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

AL 14 Despre mulţimile A, B, C, D, E se ştie că: toate elementele lui A sunt şi în B, toate elementele lui B sunt şi în C, există elemente ale lui C care nu sunt în B, toate elementele lui D sunt şi în C, dar nu toate elementele din C sunt în D, nu există elemente comune mulţimilor A şi D, există elemente care aparţin atât lui B, cât şi lui D, unele elemente ale lui E sunt şi elemente ale lui D, dar nu sunt elemente ale lui B. Care din următoarele afirmaţii rezultă din ipotezele anterioare?

a) există elemente ale lui E care aparţin lui A

b) mulţimea E este inclusă în mulţimea B

c) toate elementele lui E aparţin şi lui C

d) există elemente ale lui B care sunt şi în A şi în E

e) unele elemente ale lui E sunt elemente ale lui C

f) mulţimile C şi E nu au elemente comune

AL 15 Fie propoziţiile p şi q. Să se precizeze în câte cazuri din cele prezentate în următoarele tabele de adevăr se poate trage concluzia că propoziţia q este adevărată:

p	$p \to q$
1	1

p	$p \vee q$
0	1

p	$\bar{q} \to \bar{p}$
1	1

p	$\bar{q} \to p$
0	1

p	$p \vee q$
1	1

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 16 Să se calculeze suma $\sum\limits_{i=1}^{100} \left(\sum\limits_{j=1}^{i} j \right)$.

a) 171700 b) $\dfrac{5050}{3}$ c) 17

d) 206040 e) 2550 f) $\dfrac{51}{2}$

AL 17 Câte perechi (x, y) de numere întregi satisfac inecuaţia

$$|x| + |y| < 10?$$

a) 181 b) 180 c) 90 d) 91 e) 101 f) $4 \cdot 181$

AL 18 Câte triplete (x, y, z) de numere naturale verifică ecuaţia

$$x + y + z = 10 \ ?$$

a) 66 b) 60 c) 72 d) 120 e) 144 f) o infinitate

AL 19 Fie $M = \left\{\overline{abc} \ : \ a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, a \neq 0\right\}$ mulţimea numerelor naturale de trei cifre şi $s = a + b + c$ suma cifrelor unui astfel de număr. Câte elemente ale mulţimii M verifică $s \leq 23$?

a) 880 b) 890 c) 780 d) 860 e) 790 f) 881

AL 20 Câte triplete (a, b, c) de numere întregi verifică inecuaţia

$$(a - 1)(a - 3) + (b - 5)(b - 7) + (c - 9)(c - 11) < 0\,?$$

a) 0 b) 1 c) 6 d) 12 e) 18 f) 19

AL 21 Să se determine câte numere de 6 cifre au toate cifrele pare.

a) $4 \cdot 5^5$ b) $4 \cdot 5^4$ c) 5^6 d) 5^5 e) $4 \cdot 5^6$ f) $(4 \cdot 5)^6$

AL 22 Câte numere pare de 4 cifre încep şi se termină cu aceeaşi cifră?

a) 324 b) 360 c) 400 d) 500 e) 900 f) 1000

AL 23 Se formează un număr alăturând, unul după altul, pătratele numerelor naturale diferite de zero, consecutive: 149162536... Să se determine în acest număr cifra aşezată pe poziţia 99.

a) 2 b) 1 c) 4 d) 0 e) 7 f) 3

AL 24 Într-un şir $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine mărind cu 1 opusul termenului precedent. Dacă $a_1 = 2$, să se determine suma primilor 99 de termeni.

a) 49 b) 50 c) 51 d) 99 e) 101 f) 98

AL 25 Se consideră şirul de numere raţionale pozitive

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Să se determine al câtelea termen al şirului este numărul $\dfrac{2016}{2015}$.

a) 8120450 b) 8118435 c) 2015

d) 2016 e) 8000111 f) 8000

AL 26 O particulă se mişcă în sistemul cartezian de coordonate după următoarea schemă: porneşte din origine, după primul pas se mişcă o unitate la dreapta, la cel de-al doilea pas se mută 2 unităţi în sus, la al treilea pas 3 unităţi la stânga, la al patrulea pas 4 unităţi în jos, la al cincilea 5 unităţi la dreapta şi aşa mai departe. În ce punct se va afla particula după 2022 de paşi?

a) $(1011, 1012)$ b) $(1021, 1020)$ c) $(1020, 1020)$

d) $(1001, -1020)$ e) $(1004, 1005)$ f) $(1010, 1011)$

AL 27 Fie $a_1, ..., a_n, ...$ termenii unei progresii aritmetice de raţie r. Ştiind că $a_{21} = 20$ şi $a_{101} = 60$, să se determine r şi formula termenului a_{n+1}.

a) $r = \dfrac{1}{4}$, $a_{n+1} = n - 1$ b) $r = 1$, $a_{n+1} = 10 + \dfrac{n}{2}$

c) $r = \dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = 10 + \dfrac{n}{2}$ d) $r = -\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{2}$

e) $r = \dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{4}$ f) $r = 1$, $a_{n+1} = 10 + \dfrac{n}{6}$

AL 28 Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 m în 10 bucăţi, fiecare bucată fiind cu 6 cm mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai scurtă bucată?

a) 10 cm b) 11 cm c) 12 cm d) 13 cm e) 14 cm f) 15 cm

AL 29 O rachetă este lansată în plan vertical şi parcurge în prima secundă 150 m. În fiecare din următoarele secunde parcurge cu 10 m mai puţin ca în secunda precedentă. Care este înălţimea maximă la care ajunge racheta? Cât durează până ajunge la înălţimea maximă?

a) $h_{max} = 1200\ m$, $t = 15\ s$ b) $h_{max} = 1000\ m$, $t = 10\ s$

c) $h_{max} = 1500\ m$, $t = 20\ s$ d) $h_{max} = 2000\ m$, $t = 25\ s$

e) $h_{max} = 800\ m$, $t = 7\ s$ f) $h_{max} = 1800\ m$, $t = 22\ s$

AL 30 Fie S_m şi S_n suma primilor m şi respectiv n termeni ai unei progresii aritmetice ($m \neq n$) cu primul termen nenul. Ştiind că $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$, să se determine $\dfrac{a_m}{a_n}$.

a) $\dfrac{2m-1}{2n-1}$ b) $\dfrac{2m+1}{2n+1}$ c) $\dfrac{m}{n}$

d) $\dfrac{m-1}{n-1}$ e) $\dfrac{2m-3}{2n-3}$ f) $\dfrac{m+1}{n+1}$

AL 31 Fie n un număr natural mai mare decât 3. Să se calculeze suma

$$2 + 22 + 222 + \cdots + \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ ori}}.$$

a) $\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n\right)$ b) $\dfrac{2}{81}\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n - 1\right)$

c) $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{20^{n+1}-20}{9} - n\right)$ d) $2\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n\right)$

e) $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n\right)$ f) $\dfrac{2}{81}\left(\dfrac{10^{n+1}-10}{9} - n + 1\right)$

AL 32 Populaţia de amoebe dintr-o colonie se dublează după fiecare două zile. Dacă acum şase zile erau 200 de amoebe, câte vor fi peste patru zile?

a) 1600 b) 3200 c) 6400

d) 12800 e) 800 f) 25600

AL 33 Populaţia unui tip de bacterie se triplează la fiecare 10 minute. Dacă acum 20 de minute populaţia număra 100 de bacterii, peste câte minute din acest moment populaţia va atinge 24300 de bacterii?

a) 10 min b) 15 min c) 20 min

d) 25 min e) 30 min f) 35 min

AL 34 Fie $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ o progresie geometrică cu termeni nenuli şi raţie $q \neq 1$. Ştiind că $b_1 = 1$ şi $2b_{n+1} - b_n - b_{n-1} = 0$ pentru orice $n \geq 2$, să se determine q şi suma S_n a primilor n termeni ai progresiei.

a) $q = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ b) $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

c) $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ d) $q = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

e) $q = \frac{1}{4}$, $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ f) $q = \frac{1}{4}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

AL 35 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ de raţie q şi termeni strict pozitivi. Să se calculeze suma

$$\frac{b_1 + b_2}{b_2 + b_3} + \frac{b_2 + b_3}{b_3 + b_4} + \cdots + \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n + b_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

a) $\frac{2n}{q}$ b) $\frac{n}{q}$ c) $\frac{n}{q+1}$ d) $\frac{n-1}{q+1}$ e) $\frac{n-1}{q}$ f) $\frac{n+2}{q}$

AL 36 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ de raţie $q \neq \pm 1$ şi termeni nenuli. Să se calculeze raportul $\frac{S}{P}$, unde

$$S = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n+1}^2 \quad \text{şi} \quad P = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \cdots + \frac{1}{b_{n+1}^2}.$$

a) $b_1^4 q^{2n}$ b) $b_1^2 q^{2n}$ c) $b_1^{-4} q^{2n}$ d) $b_1^4 q^{4n}$ e) $b_1^2 q^{2n+2}$ f) $b_1^{-4} q^{2n+2}$

AL 37 Se consideră un pătrat de arie S_1. Mijloacele laturilor acestui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat, a cărui arie o notăm cu S_2. În acelaşi mod, construim succesiv un şir de pătrate ale căror arii le notăm cu $(S_n)_{n\geq 1}$ (la fiecare pas construim pătratul de arie S_n ca fiind pătratul care are drept vârfuri mijloacele laturilor pătratului precedent, cel de arie S_{n-1}). Să se determine cel mai mare număr natural nenul n pentru care $2017S_n \geq S_1$.

a) 1 b) 10 c) 11 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 38 O particulă se mişcă în sistemul de coordonate xOy după următoarea regulă: la fiecare pas, din punctul de coordonate (x, y) particula se mută în punctul de coordonate $(x + y, -x)$. Dacă particula pleacă din punctul (1,1), unde se va afla după 2022 paşi?

a) $(1, 1)$ b) $(1, 0)$ c) $(0, 0)$

d) $(0, -1)$ e) $(-1, 1)$ f) $(2, -1)$

AL 39 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}\ .$$

Să se determine $f(-x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}$.

a) $\dfrac{1}{f(x)}$ b) $-f(x)$ c) $f(x)$ d) $-f(-x)$ e) $-\dfrac{1}{f(x)}$ f) $\dfrac{1}{f(-x)}$

AL 40 Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - x \ \text{ şi } \ g(x) = 3x - 1.$$

Să se determine funcţia compusă $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $9x^2 - 9x + 2$ b) $3x\left(x^2 - x\right)$ c) $(3x - 1)^2 - x$

d) $x^2 + 2x - 1$ e) $3x^2 - 3x$ f) $x^2 - x$

AL 41 Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x<0 \\ 2x-3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad g(x) = x-2.$$

Să se determine $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x-3, & x<0 \\ 2x-7, & x \geq 0 \end{cases}$ b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x<2 \\ 2x-7, & x \geq 2 \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x-3, & x<2 \\ 2x-7, & x \geq 2 \end{cases}$ d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x<-2 \\ 2x-7, & x \geq -2 \end{cases}$

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x<0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ f) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x+3, & x<0 \\ 2x-7, & x \geq 0 \end{cases}$

AL 42 Să se determine toate funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma

$$f(x) = ax+1 \quad \text{şi} \quad g(x) = x+b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

ştiind că $f \circ g = g \circ f$.

a) $f(x) = x+1, g(x) = x$ b) $f(x) = ax+1, g(x) = x$

c) $f(x) = x+1, g(x) = x+b$ d) $f(x) = ax+1, g(x) = x+1$

e) $f(x) = ax+1, g(x) = x$ sau $f(x) = x+1, g(x) = x+b$

f) $f(x) = x+1, g(x) = x$ şi $f(x) = x+1, g(x) = x-1$

AL 43 Să se determine funcţia de gradul întâi, ştiind că graficul său taie axa Ox în punctul de abscisă $x = \sqrt{3}$ şi trece prin punctul $B(2\sqrt{3}, 2)$.

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}x+2$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}x-2$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}x+2$

d) $\frac{3}{\sqrt{3}}x+1$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}x-1$ f) $\frac{2}{\sqrt{3}}x$

AL 44 În câte puncte taie axa Ox graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ -2x - 3, & \text{dacă } x \geq 0 \text{ ?} \end{cases}$$

a) 2 b) 1 c) 0 d) 3 e) 5 f) 4

AL 45 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x \in (-\infty, 2) \\ (m-1)x, & x \in [2, 4) \\ x + 8, & x \in [4, \infty) \end{cases}.$$

Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

a) $(1, 2)$ b) $(1, 4)$ c) $(1, 4]$ d) $(1, 2]$ e) $[0, 1]$ f) $(1, \infty)$

AL 46 Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care ecuaţia

$$x^2 + |x| = mx(x + 3), \quad m \in \mathbb{R}$$

are exact trei soluţii reale diferite.

a) $\mathbb{R}$ b) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ c) $\varnothing$

d) $(-\infty, 1]$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

AL 47 Fie ecuaţia

$$ax^2 - (a+1)x + a^2 = 0, \; a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluţiile x_1 şi x_2. Să se determine o relaţie independentă de a între x_1 şi x_2.

a) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 + x_1x_2$ b) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 - x_1x_2$

c) $x_1 - x_2 = 2 + x_1x_2$ d) $x_1x_2 = 1 + x_1 + x_2$

e) $(x_1 - x_2)x_1x_2 = 3 + x_1x_2$ f) $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1x_2$

AL 48 Să se calculeze expresia $E = x_1^4 - x_2^4$, ştiind că x_1 şi x_2, cu $x_1 > x_2$, sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - ax - a^2 = 0$, unde $a \in (0, \infty)$.

a) $E = 5a^4\sqrt{3}$ b) $E = a^3$ c) $E = 3a^4\sqrt{5}$

d) $E = a^4\sqrt{5}$ e) $E = 4a^3$ f) $E = 3a^4$

AL 49 Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2^3}{x_1^2} \text{ şi } y_2 = \frac{x_1^3}{x_2^2},$$

ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 + x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) $y^2 + \dfrac{5a^2 + 1}{a^2}\, y + a = 0$ b) $y^2 - \dfrac{1}{a^2}\, y - a = 0$

c) $y^2 + a = 0$ d) $y^2 + \dfrac{5a^2 + 5a + 1}{a^2}\, y - a = 0$

e) $y^2 - a = 0$ f) $y^2 - 2a + 3 = 0$

AL 50 Să se determine mulţimea valorilor parametrului real nenul a ştiind că inecuaţia

$$ax^2 - (a+1)x + 1 \geq 0$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $(-\infty, -1]$ b) $[1, +\infty)$ c) $\{1\}$ d) $(0, 1]$ e) $\mathbb{R}^*$ f) $\varnothing$

AL 51 Fie $a \in \mathbb{R}$ şi mulţimile

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}$.

Să se determine mulţimea valorilor parametrului a, dacă $A \cap B$ are un singur element.

a) $(-\infty, 1]$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\mathbb{R}$ f) $\varnothing$

AL 52 Fie $a \in \mathbb{R}$ şi mulţimile

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}$.

Să se determine mulţimea valorilor parametrului a, dacă $A \cap B$ are exact două elemente.

a) $\{1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$

d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e) $\varnothing$ f) $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

AL 53 O parabolă $y = ax^2 + bx + c$ are vârful în punctul de coordonate $(4, 2)$ şi trece prin punctul $(2, 0)$. Să se calculeze produsul abc.

a) -12 b) -6 c) 0 d) 1 e) 6 f) 12

AL 54 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 + m + 1$, $m \in \mathbb{R}$, al cărei grafic este parabola (P). Să se determine mulţimea valorilor parametrului m pentru care parabola (P) are vârful situat în semiplanul $y \geq 0$.

a) $[0, +\infty)$ b) $\{0, 1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\varnothing$ e) $\{-1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 55 Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, ştiind că graficul său trece prin punctul $A(0, 1)$ şi este tangent axei Ox în punctul $B(1, 0)$.

a) $2x^2 - 3x + 1$ b) $-2x^2 + x + 1$ c) $3x^2 - 4x + 1$

d) $x^2 - 2x + 1$ e) $x^2 + 2x + 1$ f) $-4x^2 + 3x + 1$

AL 56 Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 - (a-2)x + 2a \quad \text{şi} \quad g(x) = x^2 + (b+1)x + b.$$

Să se determine parametrii reali a şi b, ştiind că graficele funcţiilor f şi g se intersectează în două puncte distincte situate pe axa Ox.

a) $a = 0,\ b = -2$ b) $a = 1,\ b = -2$ c) nu există

d) $a = 0,\ b = 1$ e) $a = 1,\ b = 2$ f) $a = -1,\ b = -2$

AL 57 Presiunea dintr-un recipient variază în timp după legea

$$p : [0, 10] \to \mathbb{R},\ p(t) = \frac{5}{108}t^2 - \frac{5}{12}t + 7,$$

unde t este exprimat în minute. După câte minute presiunea este minimă?

a) $4,5$ b) $6,0625$ c) 0 d) 1 e) 9 f) $6,5$

AL 58 Fie funcţia $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Să se determine valoarea minimă m şi valoarea maximă M a funcţiei f.

a) $m = 0,\ M = 1$ b) $m = -4,\ M = 5$ c) $m = -4,\ M = 4$

d) $m \in \varnothing,\ M = 5$ e) $m = -4,\ M = 1$ f) $m = -4,\ M = +\infty$

AL 59 Fie $a \in \mathbb{R}$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + x + a}{x^2 + 1}$. Să se determine mulţimea valorilor parametrului a, ştiind că imaginea funcţiei f este un interval de lungime 1.

a) $[0, +\infty)$ b) $(0, 1]$ c) $\{2\}$ d) $\varnothing$ e) $\{1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 60 Dacă numerele reale x şi y satisfac relaţia $|x + y| + |x - y| = 2$, să se determine valoarea maximă a expresiei $x^2 - 6x + y^2$.

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9

AL 61 Fie $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\}$ mulţimea soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5. \end{cases}$$

Să se calculeze

$$\left| \sum_{(x,y) \in M} xy \right| .$$

a) 6 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) 1 f) 2

AL 62 Să se determine valoarea parametrului nenul a pentru care sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = a \\ x + y = 2a \end{cases}$$

are o singură soluţie.

a) -2 b) 2 c) 4 d) 3 e) -1 f) -6

AL 63 Dacă $x + y = 2$ şi $x^3 + y^3 = -4$, să se calculeze $x^4 + y^4$.

a) -8 b) -4 c) -2 d) 2 e) 4 f) 8

AL 64 Să se determine mulţimea valorilor parametrului real a astfel încât între soluţiile complexe z_1 şi z_2 ale ecuaţiei $z^2 + (2a - 1)z + 3a - 1 = 0$ să aibă loc relaţia

$$\left| \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \right| \leq 1.$$

a) $\left[0, \frac{2}{5}\right]$ b) $(0, 1]$ c) $[-1, 1]$

d) $(1, \infty)$ e) $(-\infty, 1)$ f) $(2, 3)$

AL 65 Să se determine suma modulelor soluţiilor complexe ale ecuaţiei

$$z^2 - (6-i)z + 5 - i = 0.$$

a) $2+\sqrt{6}$ b) 1 c) $\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{6}$ e) 2 f) $1+\sqrt{26}$

AL 66 Să se determine suma modulelor soluţiilor complexe ale ecuaţiei

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0.$$

a) 3 b) 9 c) 2 d) 6 e) 8 f) 7

AL 67 Să se calculeze $\dfrac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{2012}}{i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2013}}$.

a) $\dfrac{1}{1+i}$ b) $\dfrac{i}{1+i}$ c) i d) -1 e) $-i$ f) 1

AL 68 Se consideră numerele complexe z şi w astfel încât

$$|z| = |w| = \sqrt{1006} \quad \text{şi} \quad |z+w| = \sqrt{2013}\ .$$

Să se determine valoarea lui $|z-w|$.

a) 1 b) $\sqrt{2012}$ c) 0 d) $\sqrt{1006}$ e) $\sqrt{2011}$ f) $\sqrt{2013}$

AL 69 Se consideră numerele complexe z şi w astfel încât

$$|z| = 4,\ |w| = 7 \ \text{ şi } \ |z-w| = 9\ .$$

Să se determine valoarea lui $|z+w|$.

a) 2 b) 5 c) 6 d) 7 e) 10 f) 11

AL 70 Fie mulţimea $A = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + z = 1 + i\}$ şi $n \geq 1$ un număr natural. Să se determine mulţimea $\{z^{4n},\ z \in A\}$.

a) $\{(-4)^{4n}\}$ b) $\{(-4)^n\}$ c) $\{1, (-4)^n\}$

d) $\varnothing$ e) $\{(i-1)^n\}$ f) $\{(i(i-1))^n\}$

AL 71 Fie z un număr complex ce verifică ecuaţia $z^2 - iz - 1 = 0$. Să se determine valoarea expresiei $\left(z^4 + \dfrac{1}{z^4}\right)^3$.

a) i b) 1 c) -1 d) $-i$ e) 0 f) $2i$

AL 72 Ştiind că $z^2 - z + 1 = 0$, să se determine $\left(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)^9$.

a) 2 b) -1 c) 0 d) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ e) 1 f) -2

AL 73 Numărul complex z satisface condiţiile $|z-i| = |z-1| = |z+5|$. Să se determine $|z|$.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{2}$ f) 4

AL 74 Se ştie că imaginea în plan a unui număr complex $z = x + iy$ este punctul $P(x, y)$. Imaginile în plan a patru numere complexe sunt vârfurile unui pătrat. Trei dintre numerele complexe sunt $-1+2i$, $-2-2i$ şi $3+i$. Care este cel de-al patrulea număr?

a) $3-2i$ b) $-2+3i$ c) $2-3i$

d) $-3+2i$ e) $2-2i$ f) $3-3i$

AL 75 Fie numărul complex z care verifică ecuaţia $z + |z| = 2 + 8i$. Să se determine $|z|^2$.

a) 34 b) 68 c) 100 d) 169 e) 208 f) 289

AL 76 Fie z un număr complex astfel încât $|z+2| = |z-6(1+i)| = 5$. Să se determine $|z|$.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$ f) 5

AL 77 Care este valoarea expresiei

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{24} \quad ?$$

a) -2^{24} b) 2^{24} c) 2^{12} d) -2^{12} e) 2^{8} f) -2^{8}

AL 78 Se dau numerele complexe $z_1 = -1$ şi $z_2 = -2+i$. Să se determine numerele complexe z astfel încât $|z-z_1| = |z-z_2| = |z_1-z_2|$.

a) $-\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$ b) $-\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$

c) $-\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}+i\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{4}$

e) $-\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{1\mp\sqrt{2}}{2}$ f) $\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$

AL 79 Fie mulţimea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2+z+1=0\}$. Ştiind că $z \in A$, să se calculeze $\dfrac{z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7+z^6+z^3-4}{z^{2013}+2}$.

a) z b) z^2 c) $-\dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) -1 f) 0

AL 80 Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\frac{z-i}{z+i}+1=0\ .$$

a) i b) 1 c) $-i$ d) -1 e) 0 f) $2i$

AL 81 Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 care îndeplinesc condiţiile

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, \quad z_1 + z_2 + z_3 \neq 0 \ \text{ şi } \ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

Să se determine $|z_1 + z_2 + z_3|$.

a) 1 b) 0 c) 4 d) 8 e) 2 f) 6

AL 82 Dacă numărul complex z satisface relaţia

$$|z-2|^2 + |z-3|^2 = |z-5|^2,$$

atunci $|z|$ este egal cu:

a) 4 b) 3 c) $2\sqrt{3}$ d) 2 e) $3\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}$

AL 83 Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuaţia

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0,$$

să aibă cel puţin o soluţie reală.

a) 2 b) $1 \pm \sqrt{2}$ c) $\dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

d) $-2,\ 1 \pm \sqrt{2}$ e) $2 \pm \sqrt{2}$ f) $0,\ 1 \pm \sqrt{2}$

AL 84 Să se găsească mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1 - x - 2x^2} = -x - 1.$$

a) $\{1\}$ b) $\{0, -1\}$ c) $\{0, 2\}$

d) $\{-1\}$ e) $\varnothing$ f) $\{0\}$

AL 85 Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1} = x + 1.$$

a) $\{-1, 0, 1\}$ b) $\{-1, 1, 2\}$ c) $\{-1, 0, 2\}$
d) $\{0, 1, 2\}$ e) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$ f) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

AL 86 Fie mulţimea

$$M = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1,\ \sqrt[2017]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[2017]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2\right\}.$$

Să se determine $\sum\limits_{x \in M} x^2$.

a) 1 b) 4 c) 9 d) 13 e) 20 f) 2

AL 87 Să se determine numărul natural nenul n cu proprietatea

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{9}{10}.$$

a) 99 b) 24 c) 999 d) 624 e) 9 f) 399

AL 88 Să se găsească mulţimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x + 2\sqrt{|2 + x - 3x^2|} > 1.$$

a) $\left(-\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, \infty)$ b) $\left(-\infty, -\frac{9}{11}\right) \cup \left(-\frac{7}{13}, 1\right) \cup (1, \infty)$
c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ d) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$
e) $\left(-\frac{7}{13}, 0\right] \cup (1, \infty)$ f) $\left(-\infty, -\frac{9}{11}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

AL 89 Să se găsească mulţimea valorilor lui x pentru care

$$\sqrt{x+8} \leq x+2.$$

a) $[1,\infty)$ b) $[-8,-4]\cup[1,\infty)$ c) $[-8,-4]$

d) $(-\infty,-4]\cup[1,\infty)$ e) $(-\infty,-4]$ f) $[-2,\infty)$

AL 90 Să se determine mulţimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{25x^2-44x-12} \geq 1-4x.$$

a) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup[2,\infty)$ b) $(-\infty,-2]$

c) $\left[\frac{6}{25},\infty\right)$ d) $(-\infty,-2]\cup\left[\frac{6}{25},\infty\right)$

e) $\left[\frac{13}{3},\infty\right)$ f) $\left[\frac{6}{25},\frac{13}{3}\right)$

AL 91 Să se găsească mulţimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{2x^2-x-1}+2x \geq -1\ .$$

a) $\mathbb{R}$ b) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,\infty)$ c) $[-2,1)$

d) $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$ e) $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,\infty)$ f) $[1,\infty)$

AL 92 Să se determine suma modulelor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+8}=3.$$

a) 36 b) 0 c) 7 d) 28 e) 1 f) 3

AL 93 Să se determine mulţimea valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$, ştiind că ecuaţia

$$\sqrt[3]{x^4 - 6x^2 + 9} - 3a\sqrt[3]{x^2 - 3} + 2a^2 = 0$$

are patru soluţii reale distincte.

a) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 2\sqrt[3]{3}\right)$ b) $[-\sqrt[3]{3}, +\infty)$ c) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, -\sqrt[3]{3}\right)$

d) $(1, 2]$ e) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ f) $(0, 1]$

AL 94 Se consideră ecuaţia

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - \frac{7}{26}} = \sqrt[3]{x - 1}.$$

Dacă E reprezintă mulţimea soluţiilor ecuaţiei, să se calculeze $s = \sum_{x \in E} \frac{1}{x}$.

a) $s = \frac{1}{26}$ b) $s = -26$ c) $s = \frac{10}{13}$ d) $s = 21$ e) $s = \frac{3}{13}$ f) $s = -21$

AL 95 Să se determine valorile întregi pe care le poate lua numărul b astfel încât $\frac{2002}{10^{-b}}$ să aparţină intervalului $[1, 100]$.

a) $\{0, 1\}$ b) $\{-2, -1\}$ c) $\{-3, -2\}$

d) $\{-4, -3, -2\}$ e) $\varnothing$ f) $\{-3, -1\}$

AL 96 Fie $60^a = 3$, $60^b = 5$ şi $c = \frac{1 - a - b}{2 - 2b}$. Să se determine 12^c.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 4

AL 97 Fie $a > 0$, $a \neq 1$ şi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Să se aducă la o formă mai simplă expresia

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \cdots + \frac{1}{\log_n a} \ .$$

a) $\log_a n!$ b) $\log_a n$ c) $\dfrac{1}{\log_{n^n} a}$

d) $\dfrac{1}{\log_a n^n}$ e) $\log_a \dfrac{n(n+1)}{2}$ f) $\log_n a$

AL 98 Dacă $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $bc \neq 1$ şi notăm $x = \log_b a$, $y = \log_c a$, atunci $\log_{bc} a$ este egal cu:

a) $x + y$ b) xy c) $\dfrac{1}{x+y}$ d) $\dfrac{1}{xy}$ e) $\dfrac{x+y}{xy}$ f) $\dfrac{xy}{x+y}$

AL 99 Câte numere naturale $n > 1$ au proprietatea că $\log_n 1024$ este număr întreg ?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 100 Fie numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, 1)$ sau $x_1, x_2, ..., x_n \in (1, +\infty)$. Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$E = \log_{x_1}(x_1 x_2 ... x_n) + \log_{x_2}(x_1 x_2 ... x_n) + \cdots + \log_{x_n}(x_1 x_2 ... x_n) \ .$$

a) 1 b) $n(n-1)$ c) n d) n^2 e) n^3 f) 0

AL 101 Fie a şi b numere reale strict pozitive care satisfac relaţiile

$$a^b = b^a \ \text{ şi } \ b = 9a.$$

Să se determine valoarea lui a.

a) 1/9 b) 3 c) $\sqrt[9]{9}$ d) $\sqrt[3]{9}$ e) 9 f) $\sqrt[4]{3}$

AL 102 Să se rezolve ecuaţia $2^{3^x} = 3^{2^x}$.

a) -1 b) 0 c) $\ln 6$

d) $\ln 3 - \ln 2$ e) $\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$ f) $\dfrac{\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)}{\ln 3 - \ln 2}$

AL 103 Să se rezolve ecuaţia $6^x - 3^{-x} = \sqrt{2^x - 9^{-x}}$.

a) $\left\{0\,,\dfrac{2\ln 2}{\ln 2 + 2\ln 3}\right\}$ b) $\left\{0\,,\dfrac{\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}\right\}$ c) $\left\{1\,,\dfrac{\ln 2}{2\ln 2 + \ln 3}\right\}$

d) $\left\{1\,,\dfrac{\lg 3}{1 + \lg 2}\right\}$ e) $\left\{0\,,\dfrac{\lg 2}{\lg 2 + 2\lg 3}\right\}$ f) $\left\{0\,,\dfrac{\lg 3}{1 + 2\lg 2}\right\}$

AL 104 Să se determine mulţimea valorilor reale ale lui x, ştiind că numerele $9^x - 1,\ 6^x,\ 4^x + 1$ sunt în progresie aritmetică în această ordine.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{5\}$ d) $\{0\}$ e) $\varnothing$ f) $\{-2\}$

AL 105 Să se determine mulţimea valorilor reale ale lui x, ştiind că numerele $9^x - 1,\ 6^x,\ 4^x + 1$ sunt în progresie geometrică în această ordine.

a) $\{-2\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{2\}$ e) $\varnothing$ f) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

AL 106 Fie S mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$0,5^{x-1} + 9 = 0,2^{x+1}.$$

Să se calculeze

$$\sum_{x \in S} x^2.$$

a) 5 b) 9 c) 25 d) 2 e) 6 f) 4

AL 107 Fie $\mathcal{S}$ mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei exponenţiale

$$9^x + 20^x = 15^x + 16^x.$$

Să se calculeze

$$\sum_{x\in\mathcal{S}} 2^x.$$

a) 5 b) $2+\sqrt{2}$ c) 3 d) $1+\sqrt{2}$ e) 6 f) 24

AL 108 Să se găsească produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$x^{\log_2 x} = 16.$$

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 32

AL 109 Numerele reale strict pozitive x şi y verifică relaţiile

$$\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y).$$

Să se determine raportul $\dfrac{y}{x}$.

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ c) $\log_2 3$ d) $\dfrac{9}{4}$ e) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ f) $\log_3 2$

AL 110 Câte cifre are soluţia ecuaţiei $\lg(\lg(\lg x)) = 1$?

a) 1 b) 10 c) 1000 d) 10^{10} e) $10^{10}+1$ f) $10^{10^{10}}$

AL 111 Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$.

a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 112 Să se rezolve inecuaţia

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+2x+2\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x+3)\,.$$

a) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [-1, +\infty)$ b) $x \in [-1, +\infty)$ c) $x \in \varnothing$

d) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ e) $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ f) $x \in (-\infty, 0]$

AL 113 Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia

$$\log_x \left(x^2 - x + 2\right) > 2 \log_x (x + 1) .$$

a) $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ b) $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ c) $x \in (1, \infty)$

d) $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ e) $x \in (0, 1)$ f) $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

AL 114 În ce interval se află soluţia strict pozitivă a ecuaţiei

$$(x^2 + 9)^{\frac{1}{\log_x (x^2 + 9)}} = \sqrt[3]{-x^2 + 6x} \ ?$$

a) $(2, 3]$ b) $(0, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$ c) $(1, 6)$

d) $(-1, 0)$ e) $[-1, 1]$ f) $(1, 2)$

AL 115 Să se determine mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (2\sqrt{3} + 4)^x - 3(\sqrt{3} + 1)^x + 2 < 0\}.$$

a) $\varnothing$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left(0, \frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3} + 1)}\right)$

d) $(0, +\infty)$ e) $(0, 1)$ f) $\left(\frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3} + 1)}, +\infty\right)$

AL 116 Fie e baza logaritmului natural şi x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + e^3\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x - e(e+1) = 0,$$

unde $x_1 > x_2$. Să se determine raportul $\dfrac{x_1}{x_2}$.

a) $\dfrac{e+1}{e}$ b) e c) $\dfrac{e}{2}$ d) e^3 e) 2 f) 4

AL 117 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, x < -1 \\ mx - 3,\ \ x \geq -1. \end{cases}$$

Să se determine valoarea parametrului real m pentru care f este bijectivă şi să se determine în acest caz funcţia ei inversă.

a) $m = 2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

b) $m = -2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

c) $m = 2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y \geq -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y < -1 \end{cases}$

d) $m = -2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{-y+3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

e) $m = -3,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

f) $m = -1,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} 2+y, & y > -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

AL 118 Să se determine mulţimea valorilor lui x pentru care se poate calcula

$$C_{7x}^{x^2+10}.$$

a) $\{2,3,4,5\}$ b) $\{1,2,3,4,5\}$ c) $\{1,2,3,4,5,6\}$

d) $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ e) $\mathbb{N}^* \setminus \{1,6\}$ f) $\mathbb{N}^* \setminus \{1,6,7\}$

AL 119 Să se calculeze suma $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + 100 \cdot 100!$.

a) $(101!)^2$ b) $(100!)^2$ c) $101!$

d) $101! - 1$ e) $200! + 1$ f) $200! - 1$

AL 120 Fie şirul $(x_n)_{n>1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right), \ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine mulţimea $\left\{ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \;\middle|\; \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \right\}$.

a) $\{3,4\}$ b) $\{5,6,7\}$ c) $\{2,3,4\}$

d) $\varnothing$ e) $\{2,3,4,5,6\}$ f) $\{2,4,6\}$

AL 121 Să se calculeze suma $C_9^3 + C_9^4 + C_9^5 + C_9^6 + C_9^7$.

a) 420 b) 446 c) 456 d) 492 e) 360 f) 968

AL 122 Să se determine mulţimea valorilor parametrului natural n care satisfac inegalitatea

$$2C_{n-1}^1 A_{n+1}^2 \geq \left(C_{n+1}^3\right)^2.$$

a) $\{2,3,4\}$ b) $\{1,2,3,4\}$ c) $\varnothing$

d) $\{2\}$ e) $[2,+\infty)$ f) $\{2,3,4,5\}$

AL 123 Fie
$$C = \{c_1c_2c_3 : \, c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$$
mulţimea stringurilor de trei cifre şi
$$S_k = \{b_1b_2 \cdots b_k : \, b_i \in \{0, 1\}, \, i = \overline{1, k}\}, \, k \in \mathbb{N}^*$$
mulţimea stringurilor binare formate din k biţi. Să se determine câte funcţii $h : S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_8 \to C$ se pot defini.

a) 1000^{510} b) 900^{512} c) 512^{1000}
d) 1000^{256} e) 256^{1000} f) 256^2

AL 124 Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Câte funcţii impare $f : A \to A$ există?

a) 1250 b) 125 c) 625 d) 5 e) 20 f) 25

AL 125 Să se determine numărul funcţiilor pare
$$f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

a) 1250 b) 125 c) 625 d) 5 e) 1000 f) 25

AL 126 Câte dintre submulţimile lui $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ conţin exact un număr impar?

a) 5 b) 16 c) 32 d) 64 e) 37 f) 160

AL 127 Câte dintre submulţimile lui $\{1, 2, \ldots, 10\}$ au produsul elementelor divizibil cu 10?

a) 512 b) 100 c) 1024 d) 45 e) 752 f) 256

AL 128 Câte numere de 10 cifre conţin 4 cifre de 3 şi 6 cifre de 7?

a) 24 b) 120 c) 210 d) 240 e) 256 f) 720

AL 129 Câte din submulţimile de trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 15\}$ au suma elementelor divizibilă cu 3?

a) 30 b) 90 c) 125 d) 155 e) 455 f) 910

AL 130 Câte dintre submulţimile nevide ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ au suma elementelor divizibilă cu 5?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 16

AL 131 Să se determine suma numerelor de 5 cifre distincte formate cu cifrele $1, 2, 3, 4, 5$.

a) $33333 \cdot 5!$ b) $33333 \cdot 5^5$ c) $33333 \cdot 5^4$
d) $33333 \cdot 6!$ e) $66666 \cdot 5!$ f) $66666 \cdot 5^5$

AL 132 Câte numere de 12 cifre au exact cinci cifre de 1, patru cifre de 2 şi trei cifre de 3?

a) $12!$ b) $11!$ c) $\dfrac{12!}{5!\,4!\,3!}$ d) $C_{12}^5\, C_{12}^4\, C_{12}^3$ e) $A_{12}^5\, A_{12}^4\, A_{12}^3$ f) 3^{12}

AL 133 Într-o clasă sunt 15 elevi, dintre care 8 sunt fete şi 7 băieţi. În câte moduri se poate forma o grupă de 2 fete şi 2 băieţi pentru a participa la un concurs?

a) 28 b) 588 c) $C_7^4 C_8^4$ d) 858 e) $A_{15}^7 A_{15}^8$ f) $C_7^2 + C_8^2$

AL 134 Alfabetul unui limbaj este format din literele A, B, E, L, R, T, aceasta fiind şi ordinea lor alfabetică. Dicţionarul acestui limbaj conţine doar cuvinte de 6 litere, fiecare literă din alfabet fiind luată o singură dată în oricare cuvânt. Dacă aşezarea în dicţionar se face ţinând cont de ordinea alfabetică a cuvintelor, atunci cuvântul aflat pe poziţia 538 în acest dicţionar este:

a) $REBLTA$ b) $LERBAT$ c) $TBERLA$
d) $RABLET$ e) $TRABLE$ f) $ALBERT$

AL 135 Se consideră un alfabet format din simbolurile $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $*$ şi $\sharp$. Câte cuvinte de lungime patru se pot forma în acest alfabet astfel încât fiecare simbol să apară o singură dată?

a) 24 b) 256 c) 16 d) 1 e) 64 f) 32

AL 136 Un tren este format din 5 vagoane notate cu literele A, B, C, D, E. În câte moduri pot fi aşezate aceste vagoane astfel încât vagonul A să se afle înaintea vagonului B?

a) 60 b) 20 c) 40 d) 80 e) 30 f) 45

AL 137 Câte secvenţe binare (0 sau 1) de lungime 8 încep cu 1 sau se termină cu 00?

a) 1 b) 160 c) 32 d) 192 e) 128 f) 162

AL 138 O anagramă a unui cuvânt este orice cuvânt (cu sens sau fără sens) obţinut prin permutarea literelor sale (inclusiv permutarea identică). Câte anagrame ale cuvântului SINUS pot fi construite?

a) 15 b) 30 c) 45 d) 60 e) 90 f) 120

AL 139 Să se determine câte permutări $\sigma \in S_5$ satisfac simultan condiţiile $\sigma(i) < \sigma(i+2)$ pentru orice $i \in \{1, 2, 3\}$ şi $\sigma(j) < \sigma(j+3)$ pentru orice $j \in \{1, 2\}$.

a) 1 b) 8 c) 7 d) 9 e) 24 f) 120

AL 140 Fie $M_1 = \{X, Y, Z\}$ şi $M_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Un cod este format dintr-o literă din M_1 pe prima poziţie şi 3 cifre distincte din M_2 pe următoarele 3 poziţii. Câte coduri ce conţin cel puţin una din cifrele 3,5,7 pot fi formate?

a) 210 b) 510 c) 630 d) 720 e) 1530 f) 2160

AL 141 Aveţi la dispoziţie 2 piese albe, 3 piese negre şi mai multe piese de culoare violetă, toate de aceeaşi formă pătrată. Le aşezaţi în felul următor: o piesă pe primul rând, dedesubt 2 piese, sub acestea 3 şi aşa mai departe, în final 8 piese pe al optulea rând. În câte moduri puteţi aşeza aceste piese?

a) $10\,C_{36}^{5}$ b) $10\,C_{28}^{5}$ c) A_{28}^{5} d) A_{36}^{5} e) $C_{28}^{2} \cdot C_{28}^{3}$ f) $C_{36}^{2} \cdot C_{36}^{3}$

AL 142 Un examen de matematică are două părţi. Partea A conţine 5 probleme, iar partea B conţine 4 probleme. Fiecare student trebuie să rezolve în total 5 probleme, dintre care cel puţin două trebuie să fie din partea A şi cel puţin două din partea B a examenului. Să se determine numărul de moduri diferite în care se pot alege cele 5 probleme pentru rezolvare.

a) 100 b) 60 c) 40 d) 224 e) 2400 f) 120

AL 143 La o şedinţă cu părinţii participă opt femei şi şapte bărbaţi, printre care doamna X şi domnul Y. În câte moduri se poate forma un comitet de trei femei şi patru bărbaţi, ştiind că doamna X refuză să fie desemnată împreună cu domnul Y?

a) 1540 b) 1960 c) 420
d) 282240 e) 5040 f) 277200

AL 144 Cinci prietene îşi fac una alteia cadouri astfel încât fiecare din ele oferă un cadou şi primeşte un cadou (desigur, niciuna nu primeşte propriul cadou). În câte moduri diferite îşi pot oferi cadouri?

a) 44 b) 10 c) 5 d) 120 e) 70 f) 20

AL 145 Un pătrat 3×3 este împărţit în 9 pătrăţele 1×1. Trebuie colorate cinci din cele nouă pătrăţele 1×1. În câte moduri se poate face colorarea astfel ca o linie să rămână necolorată?

a) 12 b) 15 c) 16 d) 18 e) 24 f) 32

AL 146 Un pătrat 3×3 este împărţit în 9 pătrăţele 1×1. Trebuie colorate cinci din cele nouă pătrăţele 1×1 astfel încât să existe cel puţin un pătrăţel colorat pe fiecare linie şi pe fiecare coloană. În câte moduri se poate face colorarea?

a) 27 b) 63 c) 72 d) 81 e) 90 f) 126

AL 147 Câte numere naturale au suma cifrelor 12 şi produsul cifrelor 12 ?

a) 30 b) 42 c) 72 d) 168 e) 178 f) 240

AL 148 Câţi termeni raţionali conţine dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}\right)^{99}$?

a) 10 b) 8 c) 0 d) 44 e) 15 f) 9

AL 149 Fie $x \in (0, \infty)$. Câţi termeni din dezvoltarea $\left(3\sqrt[4]{x} - \dfrac{2}{3x}\right)^n$ nu-l conţin pe x, dacă suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este 1024?

a) 4 b) 1 c) 0 d) 9 e) 3 f) 6

AL 150 Fie binomul $\left(2\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{3}{x\sqrt[4]{x}}\right)^n$, $x > 0$. Ştiind că termenul T_{13} este de forma $c_1 x$, să se determine termenul T_k din dezvoltarea binomului care este de forma $c_2 x^{-22}$, unde c_1 şi c_2 sunt două constante reale ce nu depind de x.

a) T_{24} b) T_{26} c) T_{25} d) T_{23} e) T_{28} f) nu există

AL 151 Fie $A = C_{100}^1 + 2C_{100}^2 + 3C_{100}^3 + \cdots + 100C_{100}^{100}$. Atunci

a) A este prim b) $A \in (10^5, 10^6)$ c) $3|A$

d) $7|A$ e) $A = 10000$ f) $A = 100 \cdot 2^{99}$

AL 152 Să se determine coeficientul lui x^4 din dezvoltarea $(1+5x+4x^3)^{10}$.

a) $40\cdot C_{10}^2$ b) $200\cdot C_{10}^2$ c) $5^4\cdot C_{10}^4$

d) $40\cdot C_{10}^2+5^4\cdot C_{10}^4$ e) $C_{10}^2+5^2\cdot C_{10}^4$ f) $40\cdot C_{10}^2+5^2\cdot C_{10}^3$

AL 153 Să se determine coeficientul termenului x^3y^3 din dezvoltarea expresiei $(x+2y+3)^8$.

a) 5040 b) 560 c) 2016 d) 40320 e) 37 f) 65536

AL 154 Să se determine mulţimea valorilor lui x pentru care al patrulea termen al dezvoltării $(5+2x)^{16}$ este cel mai mare.

a) $\left(\frac{15}{28},\frac{10}{13}\right)$ b) $(0,1)$ c) $(1,3)$

d) $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ e) $(-2,2)$ f) $(-1,1)$

AL 155 Care sunt probabilităţile p şi q ca, alegând una dintre soluţiile ecuaţiei $(x+2)\left(x^2-x-1\right)=0$, aceasta să fie reală, respectiv întreagă ?

a) $p=\frac{1}{3}$, $q=0$ b) $p=1$, $q=\frac{1}{3}$ c) $p=q=\frac{1}{3}$

d) $p=1$, $q=0$ e) $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$ f) $p=q=\frac{1}{2}$

AL 156 Care sunt probabilităţile p şi q ca să extragem un număr impar, respectiv un cub perfect (adică de forma $n^3, n\in\mathbb{N}^*$), dintre numerele de la 1 la 101 ?

a) $p=\frac{50}{101}$, $q=\frac{4}{101}$ b) $p=\frac{51}{101}$, $q=\frac{4}{101}$ c) $p=\frac{50}{101}$, $q=\frac{5}{101}$

d) $p=\frac{51}{101}$, $q=\frac{5}{101}$ e) $p=\frac{50}{101}$, $q=\frac{3}{101}$ f) $p=\frac{49}{100}$, $q=\frac{3}{101}$

AL 157 Din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ se aleg aleator şase numere. Care este probabilitatea ca al doilea cel mai mare număr ales să fi fost 8?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{1}{10}$

AL 158 Amestecăm un pachet de 52 de cărţi de joc şi extragem simultan două cărţi la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi aşi de aceeaşi culoare?

a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{1}{51 \cdot 52}$ c) $\frac{1}{51 \cdot 26}$ d) $\frac{A_4^2}{52}$ e) $\frac{C_4^2}{52}$ f) $\frac{1}{51 \cdot 13}$

AL 159 Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obţinem suma punctelor 6?

a) $\frac{5}{108}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{108}$ e) $\frac{1}{72}$ f) $\frac{1}{12}$

AL 160 Într-un magazin se găsesc la vânzare 10 calculatoare Asus, 5 Toshiba şi 5 Sony. Delegatul Companiei-client, nefiind specialist IT, achiziţionează la întâmplare 3 calculatoare. Care e probabilitatea ca acesta să fi ales 2 calculatoare Asus şi unul Sony?

a) $\frac{15}{76}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{5}{38}$ d) $\frac{5}{114}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{33}{38}$

AL 161 Se aruncă o monedă de 5 ori. Să se determine probabilitatea să se obţină aceeaşi faţă de exact 2 ori?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{1}{4}$

AL 162 Se aruncă un zar de două ori. Care este probabilitatea ca produsul numerelor apărute să fie număr par?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{6}$ f) $\frac{25}{36}$

AL 163 Din mulţimea numerelor de patru cifre se extrage aleator un număr. Calculaţi probilitatea ca numărul să conţină două cifre de 5 şi celelalte două de 7.

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{1}{250}$ c) $\frac{1}{375}$ d) $\frac{1}{750}$ e) $\frac{1}{1500}$ f) $\frac{1}{3000}$

AL 164 Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 13. Se extrag aleator două bile. Care este probabilitatea ca suma numerelor de pe bilele extrase să fie un număr par?

a) $\frac{6}{13}$ b) $\frac{7}{13}$ c) $\frac{5}{26}$ d) $\frac{7}{26}$ e) $\frac{42}{169}$ f) $\frac{84}{169}$

AL 165 Un program foloseşte aleator cifrele din mulţimea $\{0, 1, 2, 3\}$ pentru a scrie numere de patru cifre distincte. Se rulează programul. Care este probabilitatea ca numărul scris să fie număr par?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{9}$ f) $\frac{7}{9}$

AL 166 Un tabel cu 2 linii şi 6 coloane este completat aleator folosind toate numerele de la 1 la 12. Care e probabilitatea ca pe prima linie să fie doar numere impare?

a) $\frac{1}{A_{12}^6}$ b) $\frac{1}{C_{12}^6}$ c) $\frac{1}{6!}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2^6}{12!}$ f) $\frac{1}{4}$

AL 167 Un tabel cu mai multe linii şi coloane completat cu 0 şi 1 se numeşte *matrice binară*. Determinaţi probabilitatea ca alegând aleator o matrice binară cu 4 linii şi 4 coloane, aceasta să aibă un singur element nenul.

a) $\frac{1}{15!}$ b) $\frac{1}{16!}$ c) $\frac{2}{7!}$ d) $\frac{1}{2^{12}}$ e) $\frac{1}{2^8}$ f) $\frac{1}{2^4}$

AL 168 Un tabel cu mai multe linii şi coloane completat cu 0 şi 1 se numeşte *matrice binară*. Determinaţi probabilitatea ca alegând aleator o matrice binară cu 4 linii şi 4 coloane, aceasta să aibă urma mai mare sau egală cu 2.

a) $\frac{3!}{16!}$ b) $\frac{11}{16}$ c) $\frac{8!}{2^{16}}$ d) $\frac{15}{32}$ e) $\frac{7}{16!}$ f) $\frac{4!}{2^{16}}$

AL 169 Se consideră matricele:

$$A=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ şi } C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $A \cdot B - C$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

AL 170 Se consideră matricele:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} y & 1 \\ 2y & y \end{pmatrix} \text{ şi } C=\begin{pmatrix} y & 6 \\ 2x+4y & 2y \end{pmatrix}.$$

Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $xA + yB = C$.

a) $x=1,\ y=2$ b) $x=2,\ y=1$ c) $x=-2,\ y=-2$

d) $x=2,\ y=-1$ e) $x=1,\ y=-2$ f) $x=2,\ y=2$

AL 171 Fie matricele:

$$A=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

şi funcţia

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X) = X^2 - 3X + I_2.$$

Să se determine matricele $B \cdot A \cdot C$ şi $f(B)$.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $2B$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $-2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $-2B$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $-2B$

f) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $-2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

AL 172 Să se determine mulţimea numerelor $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln k & k \\ 1 & \ln k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 10 - \ln 10! & -35 \\ 10 & 10 - \ln 10! \end{pmatrix}.$$

a) $\{10\}$ b) $\{2, 4\}$ c) $\varnothing$

d) $\{1\}$ e) $\{2\}$ f) $\{5\}$

AL 173 Care dintre următoarele propoziţii sunt adevărate:

P_1 : Dacă A^2 se poate calcula, atunci A este o matrice pătratică;

P_2 : Dacă AB şi BA se pot calcula, atunci A şi B sunt matrice pătratice;

P_3 : Dacă AB şi BA se pot calcula, atunci AB şi BA sunt matrice pătratice;

P_4 : Dacă $AB = B$, atunci A este matricea identitate ?

a) P_1, P_2, P_3 b) P_2, P_3

c) P_1, P_2 d) P_1, P_3

e) P_2, P_3, P_4 f) nicio propoziţie nu este corectă

AL 174 Fie A şi B două matrice pătratice. Care dintre următoarele matrice sunt întotdeauna egale cu $(A - B)^2$?

$M_1 = A^2 - B^2$

$M_2 = (B - A)^2$

$M_3 = A^2 - 2AB + B^2$

$M_4 = A(A-B) - B(A-B)$

$M_5 = A^2 - AB - BA + B^2$

a) M_2, M_4, M_5 b) M_1, M_2, M_3 c) M_1, M_2, M_3, M_4, M_5

d) M_2, M_3 e) M_2, M_3, M_5 f) M_1, M_2, M_3, M_4

AL 175 Să se determine numărul matricelor din mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & c \\ b & 0 & b \\ c & 1 & a-1 \end{pmatrix} \;\middle|\; M^2 = \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & x \end{pmatrix},\ a,b,c,x,y \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) 0 b) 5 c) 1 d) 3 e) 4 f) 2

AL 176 Fie $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y, z \in \mathbb{R}$. Să se determine x^{yz}, dacă matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

a) 4 b) x c) 8 d) 2 e) e f) 1

AL 177 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & -1 & b & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$. Să se determine $a+b$ astfel încât

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 31 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

a) -2 b) 8 c) 2 d) 3 e) 5 f) -1

AL 178 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze

$$\mathrm{tr}[(I_2 + A)(I_2 + 2A)(I_2 + 3A)\dots(I_2 + 2018A)],$$

unde $\mathrm{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătratice X.

a) 0 b) $2018!$ c) $1 + 2017!$

d) $2019!$ e) $1 + 2018!$ f) $1 + 2019!$

AL 179 Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $AB \neq O_2$ şi $BA = O_2$. Să se determine mulţimea valorilor pe care le poate lua suma elementelor matricei B.

a) $\{2k \ : \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}\}$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Z}$

d) $\mathbb{Z} \setminus \{1\}$ e) $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ f) $\{2k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$

AL 180 Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), X = (x_{ij})_{i,j=1,2}$, este o matrice care comută la înmulţire cu orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci:

a) $x_{11} = x_{22},\ x_{12} = x_{21} = 0$ b) $x_{11} = -x_{22},\ x_{12} + x_{21} = 1$

c) $x_{11} = x_{12} = 0,\ x_{22} = x_{21} \in \mathbb{Z}^*$ d) $x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} \in \mathbb{Z}^*$

e) $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = -1$ f) $x_{11} - x_{12} + x_{21} - x_{22} = 1$

AL 181 Să se determine matricea X care verifică relaţia

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

AL 182 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi mulţimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C},\ A^n = I_2 \right\}.$$

Câte elemente are mulţimea G?

a) $(n-1)^2$ b) n c) $n-1$

d) $n-2$ e) $(n-2)^2$ f) n^2

AL 183 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2018 & 2 \\ 1009 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2018}.$$

a) $\dfrac{2019^{2018}+1}{2018} A$ b) $\dfrac{2018^{2016}+1}{2017} A$ c) $\dfrac{2019^{2018}-1}{2018} A$

d) $2018A$ e) $1009 \cdot 2019\ A$ f) $\dfrac{2018^{2016}-1}{2017} A$

AL 184 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se determine cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = kA$.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7

AL 185 Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $X^{4n+1} + 2^{2n}X$ pentru $n \in \mathbb{N}$ impar.

a) X b) I_2 c) O_2 d) $-X$ e) $-I_2$ f) X^2

AL 186 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i > j \\ (-1)^{i+j}\, C_j^i & , \quad i < j\ . \end{cases}$$

Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, exprimând rezultatul în funcţie de matricea identitate I_3 şi de puterile matricei $B = A - I_3$.

a) $A^n = nB^n + 2I_3$

b) $A^n = \left(\dfrac{n^2-n}{2} + 1\right) B + nI_3$

c) $A^n = \dfrac{n^2-n}{2}\, B^2 + nB + I_3$

d) $A^n = \dfrac{n^2-n}{2}\, B + nI_3$

e) $A^n = nB^2 + \dfrac{n^2-n}{2}\, B + I_3$

f) $A^n = \dfrac{n^2-n-1}{2}\, B^2 + nB + I_3$

AL 187 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei A^n, $n \geq 2$.

a) $3^n + 2^{n+1}$

b) $4 \cdot 3^n - 2^n$

c) $4 \cdot 3^{n-1} + 7 \cdot 2^{n-1} + 6^{n-1}$

d) $3^{n+1} + n \cdot 2^{n-1}$

e) $4 \cdot 3^n - 2^{n-1}$

f) $3^{n+1} - 2^n + 6^{n-1}$

AL 188 Fie matricea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, \ x \neq \frac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $(A(-2017))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4035^n & 0 & -4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ -4035^n & 0 & 4035^n \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1+4035^n & 0 & 1-4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-4035^n & 0 & 1+4035^n \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+4035^n & 0 & 1-4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-4035^n & 0 & 1+4035^n \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2017^n & 0 & 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 4035^n & 0 & -2017^n \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -4035^n & 0 & 2017^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^n & 0 & -4035^n \end{pmatrix}$

f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-4035^n & 0 & 2017^{2n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^{2n} & 0 & 1-4035^n \end{pmatrix}$

AL 189 Să se determine numerele reale a şi b pentru care soluţia ecuaţiei

$$X^{2017} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

a) $a = 0$, $b = 0$

b) $a = 2017$, $b = \frac{1}{2017}$

c) $a = \frac{1}{2017}$, $b = 2017$

d) $a = 0$, $b = \frac{1}{2017}$

e) $a = 2017$, $b = 0$

f) $a = \frac{1}{2017}$, $b = \frac{1}{2017}$

AL 190 Fie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice nenulă cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad = bc$ şi $a+d \neq 0$. Să se determine suma elementelor matricei

$$\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}^n, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) $\dfrac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(b+c) + 1$ b) $(a+b+c+d)^n + 2$

c) $\dfrac{(1+a+d)^{n-1}}{a+d}(a+b+c+d)$ d) $\dfrac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(a+b+c+d) + 2$

e) $(a+b+c+d+2)^n$ f) $(1+a+d)^n(b+c) + 1$

AL 191 Să se calculeze A^{36}, unde $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

a) I_2 b) O_2 c) A d) $\sqrt{3}A$ e) $2^{36}I_2$ f) $3^{36}I_2$

AL 192 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze A^{2017}.

a) $2^{2017}A$ b) I_3 c) $-I_3$ d) $2^{1008}A$ e) $2^{2017}I_3$ f) $2^{1008}I_3$

AL 193 Se consideră mulţimea matricelor de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1+4m & 6m \\ -2m & 1-3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Să se studieze dacă $X(a)X(b) = X(a+b+ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi să se calculeze $(X(1))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 6(2^n-1) \\ 2+2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

b) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 3\cdot 2^{n+1}-6 \\ 2-2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

c) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 3\cdot 2^{n+1}+6 \\ 2(1-2^n) & 4(1-3\cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$

d) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 6(2^n+1) \\ 2-2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

e) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 6(2^n-1) \\ 2(1-2^n) & 4(1-3\cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$

f) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 3\cdot 2^{n+1}+6 \\ 2(1-2^n) & 4+3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

AL 194 Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

şi $X = A\cdot B\cdot C$. Să se determine suma elementelor matricei X^n, unde n este un număr natural nenul.

a) 2^{n+1} b) $5^n - 2^{n-1}$ c) $\frac{5^{n+1}}{3}$

d) $\frac{2^n}{3}$ e) $5^n - 1$ f) $\frac{4^n+5^n}{3}+1$

AL 195 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$. Să se calculeze produsul

$$P = \prod_{X\in\mathcal{M}} X,$$

unde $\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : X^2 = A\}$.

a) $P = 5^4\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $P = 5^4\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ c) $P = 5^2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

d) $P = 5^4\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ e) $P = 5^2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ f) $P = 5^3\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

AL 196 Să se determine suma elementelor fiecărei matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţia

$$X^2 - 4X = \begin{pmatrix} -3 & 2018 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) -2015 b) -2013 c) -2015 şi 2023

d) 2018 e) -2017 şi 2023 f) -2017 şi -2013

AL 197 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2019 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se găsească $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2019} + X = A$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2018}{2019} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1010 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{1}{2020}\begin{pmatrix} 2020 & 2019 \\ 0 & 2020 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$ f) $A - \begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$

AL 198 Se consideră mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se calculeze $B(a) = A(a) + A^2(a) + \cdots + A^n(a)$ şi să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\dfrac{1}{n}B(a) \in \mathcal{M}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\dfrac{n}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, a impar b) $\begin{pmatrix} n & 5a\dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$, a impar

c) $\dfrac{n}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, a par d) $\begin{pmatrix} 1 & 5a\dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a par

e) $\dfrac{n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5a(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a impar f) $\begin{pmatrix} n & 5a\dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$, a par

AL 199 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & a_1 - b_3 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & a_2 - b_3 \\ a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 \end{vmatrix},$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$.

a) $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$ b) $a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3$

c) $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3$ d) 0

e) $-a_1 + b_1 - a_2 + b_2 - a_3 + b_3$ f) $a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3$

AL 200 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, unde $a_{ij} = 1 + \log_{i+1} j$. Să se calculeze $(\mathrm{tr}(A))^{\det A}$, unde $\mathrm{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A.

a) $\log_3 2 + \log_2 3 + 3$ b) 1 c) 0

d) $\dfrac{1}{2}\log_2 3$ e) $\dfrac{3}{2}\log_3 2 + 3$ f) $\log_3 2 + \dfrac{1}{2}\log_2 3 + 3$

AL 201 Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \sum\limits_{k=1}^{n} A^k$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze determinantul matricei B.

a) $(2^{n+1} - 1)(3^n - 1)$ b) 1 c) 0

d) $3(2^n - 1)(3^n - 1)$ e) 6^n f) $\dfrac{1}{6^n}$

AL 202 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) $a + b + c$ b) $a^2 + b^2 + c^2$

c) $ab + bc + ca$ d) $(a + b)(a + c)(b + c)$

e) $-a - b - c$ f) $-4(b - a)(c - a)(c - b)$

AL 203 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $\det(A - I_2) = 2$. Să se calculeze

$$\det A + \det(A - 2I_2).$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

AL 204 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

a) 0 b) b c) c

d) a e) $a+b+c$ f) $(a+b+c)^3$

AL 205 Să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab} \\ \overline{cab} & \overline{abc} & \overline{bca} \\ \overline{bca} & \overline{cab} & \overline{abc} \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

a) $99800\ (a-b)(b-c)(c-a)$ b) $998001\ (a^3+b^3+c^3-3abc)$

c) $10^6\ abc$ d) $9908\ (a+b+c)^3$

e) 0 f) $999\ \overline{abc}$

AL 206 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ale cărei elemente satisfac condiţia $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0$ pentru orice $i, j, k = \overline{1, 3}$. Să se determine valoarea determinantului matricei A.

a) 2017 b) -2017 c) 1 d) -1 e) 0 f) 1009

AL 207 Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a > b > c$, $\mathrm{m}(\widehat{C}) = 15°$ şi

$$\begin{vmatrix} c^2+ac-a-1 & ac-a & a^2-b^2-c \\ b^2+ab-a-1 & a^2-c^2-b & ab-a \\ b^2c+bc+bc^2 & a^2b-b^3 & a^2c-c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

a) $1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $2 \pm \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ c) 1

d) $1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$

AL 208 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a^3} & -\dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{b^3} & -\dfrac{1}{b^2} & \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{c^3} & -\dfrac{1}{c^2} & \dfrac{1}{c} \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

a) $\dfrac{1}{abc}\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)$

b) $\dfrac{1}{abc}\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)$

c) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)$

d) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)$

e) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)$

f) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)$

AL 209 Fie determinantul

$$\Delta_n^i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \ldots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \ldots & a_n^{i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}, \text{ unde } 1 \leq i \leq n-1,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ a_i \in \mathbb{R}^*.$$

Să se calculeze $\Delta_3^1 + \Delta_3^2$.

a) $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

b) $(a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

c) $(a_1 + a_2 + a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

d) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

e) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

f) $a_1 - a_2 + a_3$

AL 210 Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ soluţiile ecuaţiei $\det(A - xI_3) = 0$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $| x_1 | + | x_2 | + | x_3 |$.

a) 0 b) 1 c) 3 d) 7 e) -3 f) 4

AL 211 Să se determine suma numerelor reale x, y, z pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & y & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & z & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

satisface relaţiile $AA^t = A^t A = I_3$ şi are determinantul egal cu 1.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) 0

AL 212 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = \mathrm{tr}(A) = 1$, unde $\mathrm{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A. Câte elemente are mulţimea $\{I_2, A, A^2, ..., A^{2018}\}$?

a) 5 b) 2 c) 7 d) 3 e) 6 f) 4

AL 213 Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB \neq BA$ şi $A^3 = B^3$. Să se determine valoarea expresiei

$$\det(AB) - \mathrm{tr}(A + B),$$

unde $\mathrm{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui X.

a) 2 b) 0 c) -1 d) -2 e) 1 f) 3

AL 214 Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care soluţia ecuaţiei

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix},$$

este o matrice nesingulară.

a) $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ b) $\{0,1\}$ c) $\mathbb{R}$

d) $\varnothing$ e) $\{0\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

AL 215 Fie ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) 12 b) 5 c) -9 d) -4 e) 7 f) 3

AL 216 Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei matriceale

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} -m & -m \\ m & m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 3m & m \\ m & 3m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$ f) $\left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ -m+2 & -m+2 \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$

AL 217 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc relaţia

$$A^{-1} = aA^2 + bA + cI_3.$$

a) $2a + b = \det A$ b) $a = 1,\ b = 2,\ c = 0$

c) $a = 0,\ b = 2,\ c = -1$ d) $a = -1,\ b = 2,\ c = 0$

e) nu există $a, b, c \in \mathbb{R}$ f) $a = 1,\ b = -2,\ c = 0$

AL 218 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ ale cărei elemente sunt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \ \text{ sau } \ i = j = 1, \\ i^2 + i + 1, & i = j \ \text{ şi } \ i \neq 1. \end{cases}$$

Să se determine suma elementelor inversei matricei A.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 219 Să se determine valorile parametrului real m astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & m+1 & x+1 \\ x & x-1 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$ b) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ c) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

d) $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ e) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty)$ f) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$

AL 220 Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}_+^*)$ astfel încât

$$\det(A - aA^{-1}) = \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Să se determine abc.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 12 f) -18

AL 221 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $A^2 \neq O_2$ şi

$$A^4 - (a+d)^2 A^2 + (ad - bc)^2 I_2 = O_2.$$

Să se studieze existenţa inversei lui A şi în cazul în care aceasta există să se determine A^{-1}.

a) $\dfrac{a+d}{ad-bc}\,I_2$ b) nu există

c) $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{1}{a+d}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

e) A f) $\dfrac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$

AL 222 Fie $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ două matrice de forma

$$A = \left[\ a \mid\ c_2 \mid\ c_3 \mid\ c_4\ \right], \quad \text{respectiv} \quad B = \left[\ b \mid\ c_2 \mid\ c_3 \mid\ c_4\ \right],$$

unde a, b, c_2, c_3, c_4 sunt coloanele acestor matrice. Dacă

$$\det(A) = 1 \quad \text{şi} \quad \det(B) = 4,$$

cât este determinantul matricei $C = \left[\ c_2 \mid\ a+b \mid\ c_3 \mid\ c_4\ \right]$?

a) 5 b) 0 c) 4

d) -5 e) 1 f) Nu se poate determina

AL 223 Câte cvadruplete ordonate (a,b,c,d) de numere naturale satisfac simultan relaţiile: $a+b+c+d=12$ şi $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$?

a) 147 b) 127 c) 118 d) 128 e) 64 f) 96

AL 224 Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 6

AL 225 Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 226 Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \sqrt{2} & m \\ m & \sqrt{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ are rangul minim.

a) $\pm\frac{2}{3}$ b) 0 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $-\sqrt{2}$ f) $-\frac{2}{3}$

AL 227 Pentru câte valori ale parametrului real m matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

are rangul doi?

a) 0 b) 1 c) 2 d) o infinitate e) 6 f) 10

AL 228 Să se determine valorile parametrilor reali a şi b pentru care matricele

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

au acelaşi rang.

a) $a = 1,\ b = 0$ b) $a = -1,\ b = 0$ c) $a = 0,\ b = 0$
d) $a = 0,\ b = 1$ e) $a = 0,\ b = -1$ f) $a = 1,\ b = 1$

AL 229 Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$

d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$ f) $\{1, \pm 2\}$

AL 230 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} 2x + 5y + mz + 8t = 7 \\ x - y + 5z - 3t = n \\ 3x - my + z + pt = 7 \end{cases},$$

unde $m, n, p \in \mathbb{R}$ şi $n \neq 0$. Să se calculeze suma $m + p$ astfel încât sistemul să fie compatibil, iar rangul matricei sale extinse să fie egal cu 2.

a) 1 b) 34 c) 17 d) -10 e) -20 f) -7

AL 231 Se dă sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + (m-1)z = -2 \\ x + 2y + z = 2 \\ mx + y + 3z = 1 \end{cases}.$$

Să se determine mulţimea valorilor reale ale lui m astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.

a) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\{-2, 2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{-2\}$ e) $\left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$ f) $\{1\}$

AL 232 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x+y+mz+4t=p \\ 2x+3y+z+6t=1 \\ -x-2y+3z+nt=2, \quad m,n,p\in\mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Să se determine $(m+n)^p$ astfel încât sistemul să fie compatibil şi rangul matricei sistemului să fie egal cu 2.

a) 6^3 b) 1 c) -8 d) 4^6 e) -1 f) 8

AL 233 Fie sistemul

$$\begin{cases} x+3y+4z=m \\ 2x+4y+6z=-1 \\ -2x+6y+4z=5 \end{cases}.$$

Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

a) $\left\{-\dfrac{1}{10}\right\}$ b) $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{10}\right\}$ c) $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{10}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{1}{10}\right\}$ e) $\left\{-\dfrac{1}{20}\right\}$ f) $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{20}\right\}$

AL 234 Să se determine mulţimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul

$$\begin{cases} -2x+my-6z=m-1 \\ mx-2y+7z=1-m \\ x+y+z=m^2-1 \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat.

a) $\{-2\}$ b) $\varnothing$ c) $\{3\}$

d) $\{1\}$ e) $\{2\}$ f) $\{-1\}$

AL 235 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4\ . \end{cases}$$

a) $(-24, 14, 19)$ b) $(-2, -3, 3)$ c) $(21, 10, -14)$
d) $(-5, -3, 6)$ e) $(-14, -21, 24)$ f) $(3, -2, -3)$

AL 236 Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ -3x - 2y + z = -3. \end{cases}$$

Care dintre următoarele relaţii este verificată de soluţiile sistemului?

a) $x^2 - y^2 - 2z = 1$ b) $x + y + z = 3$ c) $x^2 + y - z^2 = -1$
d) $x + y^2 - z^2 = 1$ e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ f) $x^2 + y + z^2 = 4z.$

AL 237 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Care dintre relaţiile de mai jos este adevărată pentru orice soluţie $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ a ecuaţiei matriceale

$$(A - 9I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

a) $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ b) $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ c) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$
d) $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ f) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

AL 238 Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi sistemul

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ x + z = 1 \end{cases}.$$

Să se determine mulţimea valorilor lui a pentru care soluţia sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\mathbb{R}^*$ d) $\mathbb{R}_+^*$ e) $\mathbb{Q}^*$ f) $\{-1\}$

AL 239 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 + a \\ -x + y - z = a \\ 2x + y = 1 \end{cases},$$

unde a este un parametru real. Să se determine mulţimea valorilor lui a pentru care soluţia sistemului verifică relaţia $3x + 3y - z = 0$.

a) $\{0\}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1\}$ e) $\{2\}$ f) $\{-2\}$

AL 240 Să se determine acele soluţii (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) $(0, 1, 0), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{10}{13}\right)$ b) $(1, 0, 0), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$

c) $\left(\frac{12}{13}, \frac{7}{13}, -\frac{3}{13}\right), (0, 0, -1)$ d) $(0, 0, 1), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$

e) $(0, 0, 1), \left(-\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right)$ f) $\left(\frac{11}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right), (0, 0, 1)$

AL 241 Fie (x_0, y_0, z_0) o soluţie nebanală a sistemului liniar omogen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} .$$

Să se determine valoarea raportului $\dfrac{5x_0 - 10y_0 - z_0}{10x_0 + 5y_0 + 3z_0}$.

a) $\dfrac{23}{5}$ b) 1 c) $\dfrac{7}{5}$ d) 2 e) -1 f) $-\dfrac{7}{5}$

AL 242 Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} (a-2)x + ay + (a+1)z = 0 \\ (b-2)x + by + (b+1)z = 0 \\ (c-2)x + cy + (c+1)z = 0. \end{cases}$$

Să se determine a, b, c astfel încât sistemul să aibă o singură soluţie.

a) $a = b = c$ b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ c) $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$

d) $\nexists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ e) $a = b \neq c$ f) $a \neq b = c$

AL 243 Să se determine mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + my + m^2 z = 0 \\ m^2 x + y + mz = 0 \\ m^2 x + my + z = 0 \end{cases}$$

să admită şi soluţii diferite de soluţia banală.

a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

d) $\{\pm 1\}$ e) $\{1\}$ f) $\{-1\}$

AL 244 Fie $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} x + ay - 1 = 0 \\ ax - 3ay - (2a+3) = 0 \end{cases},$$

este compatibil nedeterminat. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$

unde (u, v) este o soluţie a sistemului.

a) u b) v c) uv d) 0 e) 1 f) -1

AL 245 Se consideră sistemul liniar

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \\ bx + cy + az = 1 \end{cases},$$

unde a, b, c sunt parametri reali. Care dintre următoarele propoziţii matematice este adevărată?

a) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este compatibil determinat
b) Dacă $a = 1, b = 2, c = -3$ atunci sistemul este incompatibil
c) Dacă $a = 1, b = 3, c = 2$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat
d) Dacă $a = -1, b = 3, c = -2$ atunci sistemul este compatibil determinat
e) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este incompatibil
f) Toate afirmaţiile sunt false

AL 246 Fie $n \in \mathbb{N}$. Dacă (x_n, y_n, z_n) este soluţia sistemului

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 + 2^{n+1} \\ x + 2y + z = 2 + 2^n - \dfrac{1}{2^n} \\ 2x + y + z = 1 + 2^n + \dfrac{1}{2^n} \end{cases},$$

să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} x_n y_n z_n$.

a) ∞ b) 0 c) 1 d) 2 e) -2 f) 3

AL 247 Fie S mulţimea soluţiilor reale ale sistemului

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+\ y+\ z=2 \\ 3x+3y+4z=2 \end{cases}.$$

Să se determine $\min\limits_{(x,y,z)\in S}(x^2+y^2+z^2)$.

a) 1 b) $1,4$ c) $1,6$ d) 2 e) $2,4$ f) 3

AL 248 Pe mulţimea $(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=\dfrac{xy}{x+y}$.
Să se calculeze $\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{1}{3}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{50}$.

a) $\dfrac{1}{1225}$ b) $\dfrac{1}{1274}$ c) 1275 d) $\dfrac{1}{1275}$ e) 1274 f) $\dfrac{1}{1300}$

AL 249 Pe mulţimea $(-1,1)$ se consideră legea de compoziţie $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.
Să se calculeze

$$\underbrace{\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*...*\frac{1}{2}}_{de\ n\ ori}.$$

a) $\dfrac{4\cdot 3^n-32}{3^n-4}$ b) $\dfrac{2^n}{2^n+1}$ c) $\dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+1}$

d) $\dfrac{7\cdot 2^{n-2}-1}{13\cdot 2^{n-3}+1}$ e) $\dfrac{3^n-1}{3^n+1}$ f) $\dfrac{4^{n+1}-1}{4^{n+1}+1}$

AL 250 Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie

$$x\circ y=(x-a)^2(y-a)+a,\ \ a\in\mathbb{Z}.$$

Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x\circ x=x$.

a) $\{a, a-1\}$ b) $\{a, a+1\}$ c) $\{a-1, a, a+1\}$
d) $\{-a, 1-a\}$ e) $\{-a, -a-1\}$ f) $\{-a, 1-a, -a-1\}$

AL 251 Pe mulţimea numerelor reale se defineşte operaţia algebrică

$$x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă (u, v) este soluţia sistemului

$$\begin{cases} x \circ y \circ 2 = \sqrt{17} \\ (x \circ 2) + (y \circ 3) = 2\sqrt{13} \end{cases}$$

cu proprietatea că $u, v > 0$, să se determine $u + v$.

a) 1 b) 0 c) 5 d) 19 e) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{19}$

AL 252 Se consideră $\mathbb{R}$ cu legea de compoziţie $x * y = ax + y$, $a \in \mathbb{R}$ şi mulţimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

cu operaţia de înmulţire a matricelor " $\cdot$ ". Să se determine mulţimea valorilor lui a pentru care a funcţia $f : \mathbb{R} \to M$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$$

satisface relaţia $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\{0\}$ b) $\{-1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\varnothing$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 253 Să se determine $k \in \mathbb{R}$, ştiind că mulţimea $[1, 3]$ este parte stabilă în raport cu operaţia $x \circ y = xy - 2x - 2y + k$.

a) $k = 0$ b) $k = 1$ c) $k = 2$ d) $k = 3$ e) $k = 6$ f) $k = -2$

AL 254 Se consideră mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, care este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulţirea matricelor. Să se determine mulţimea valorilor pe care le poate lua $\det A$, dacă A şi A^{-1} aparţin mulţimii $\mathcal{M}$.

a) $\{0, 1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\{-1\}$ f) $\{-1, 0\}$

AL 255 Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ şi mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta x & \gamma \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}$.

Care este condiţia ca $(\mathcal{M}, \cdot)$ să fie parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$?

a) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ b) $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$ c) $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 1$

d) $\alpha = 2\beta$, $\gamma = -1$ e) $\alpha = 2\beta$, $\gamma = 1$ f) $\alpha = -\beta$, $\gamma = 1$

AL 256 Pe mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

se consideră legea de compoziţie $A * B = A \cdot B + aA + bB + 6I_2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. În care din următoarele cazuri legea este asociativă şi comutativă?

a) $a \in \{-3, 2\}$, $b = a$ b) $a \in \{-2, 3\}$, $b = a$ c) $a \in \{-1, 2\}$, $b = a$

d) $a = -2$, $b = 3$ e) $a = -1$, $b = 2$ f) $a = -3$, $b = 2$

AL 257 Să se determine o relaţie între parametrii reali a şi b astfel încât legea de compoziţie $x * y = xy + ax + ay + b$ de pe $\mathbb{R}$ să fie asociativă.

a) $a^2 = a + b$ b) $a = a^2 + b$ c) $b^2 + a = a^2$

d) $a + a^2 = b$ e) $2a = b + a^2$ f) $2b + a = a^2$

AL 258 Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2x + 2y + k.$$

Să se găsească $k \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă. Pentru această valoare, să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$x * x = -2.$$

a) $\{1\}$ b) $\{-1\}$ c) $\{1,-1\}$ d) $\{2,-2\}$ e) $\{1,-2\}$ f) $\{-2\}$

AL 259 Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi şi să se calculeze $i*i^2*i^3*i^4*i^5$.

a) $e = 1 + i,\ -1$ b) $e = 1 + i,\ i$ c) $e = 1,\ 1 - 2i$

d) $e = 1 - i,\ i$ e) $e = -i,\ 2 - i$ f) $e = 2 + i,\ 1 - i$

AL 260 Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2i\,(x + y) - 4 - 2i\ .$$

Să se determine elementul neutru e al acestei legi şi să se calculeze

$$w = (1 - i) * (1 - i)^2 * (1 - i)^3 * (1 - i)^4 * (1 - i)^5\ .$$

a) $e = 1 - 2i$ şi $w = 1 - i$ b) $e = 2i$ şi $w = -2i$

c) $e = 2i$ şi $w = 1 - i$ d) $e = 2 - i$ şi $w = -i$

e) $e = 1 - 2i$ şi $w = -2i$ f) $e = -i$ şi $w = 2 - i$

AL 261 Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie

$$x * y = (x - 3)(y - 1) + 3.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi.

a) nu există b) 4 c) 3 d) 0 e) 2 f) 6

AL 262 Pe mulţimea numerelor întregi impare $2\mathbb{Z}+1$ se defineşte operaţia

$$x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1).$$

Să se determine mulţimea elementelor simetrizabile ale monoidului $(2\mathbb{Z}+1, *)$.

a) $\{-3, 1\}$ b) $\{1\}$ c) $2\mathbb{Z}+1$

d) $\{-5, -3, 1, 3\}$ e) $\{-3, -1, 1, 3\}$ f) $\{-5, 1\}$

AL 263 Fie mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se determine numărul elementelor simetrizabile ale monoidului $(\mathcal{M}, \cdot)$, unde "$\cdot$" reprezintă operaţia de înmulţire a matricelor.

a) 0 b) 1 c) 8 d) 5 e) 7 f) 9

AL 264 Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$z_1 \perp z_2 = z_1 \cdot z_2 + Im(z_1) \cdot Im(z_2).$$

Să se determine elementele simetrizabile în raport cu această lege.

a) $\{z \in \mathbb{C},\ Re(z) = 0\}$ b) $\{z \in \mathbb{C},\ Re(z) \neq 0\}$

c) $\mathbb{C}$ d) $\mathbb{C}^*$

e) $\{z \in \mathbb{C},\ Im(z) = 0\}$ f) $\{z \in \mathbb{C},\ Im(z) < 0\}$

AL 265 Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

şi mulţimea $\mathcal{M} = \{xA + B \mid x \in \mathbb{R}^*\}$. Să se determine mulţimea elementelor inversabile din $\mathcal{M}$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

a) $\varnothing$ b) $\mathcal{M} \setminus \left\{\frac{1}{2}A + B\right\}$ c) $\mathcal{M} \setminus \{I_2\}$

d) $\mathcal{M} \setminus \{-A + B\}$ e) $\mathcal{M}$ f) $\mathcal{M} \setminus \{2A + B\}$

AL 266 Fie $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ şi $a \in [0, \infty)$. Pe mulţimea $M = (a, +\infty) \setminus \{a + 1\}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = (x - a)^{\ln \sqrt[k]{y-a}} + a.$$

Să se determine simetricul lui $x \in M$ în raport cu legea $*$.

a) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)}+a}$ b) $\dfrac{e^{k^2}}{x-a} + a$ c) $\dfrac{e^{k^2}}{x-a}$

d) $e^{\frac{k}{\ln(x-a)}}$ e) $e^{k^2} - x - 2a$ f) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)}} + a$

AL 267 Pe mulţimea $\mathbb{R}_+^*$ se introduce legea de compoziţie

$$x * y = a^{\sqrt[n]{\log_a^n x + \log_a^n y - \log_a^n b}},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, n impar, $n \neq 1$. Să se determine simetricul lui $x \in \mathbb{R}_+^*$ în raport cu această lege de compoziţie.

a) $\dfrac{b^{2^n}}{x}$ b) $a^{\sqrt[n]{\log_a^n b + \log_a^n x}}$ c) $a^{\sqrt[n]{2\log_a^n b - \log_a^n x}}$

d) $\dfrac{b^2}{x}$ e) $a^{\sqrt[n]{\log_a^n b - \log_a^n x}}$ f) $\dfrac{b^{\sqrt[n]{2}}}{x}$

AL 268 Pe mulţimea $\mathbb{R}_+^*$ se consideră legea de compoziţie

$$x * y = 2^{\sqrt[3]{\log_2^3 x + \log_2^3 y - 8}}.$$

Ştiind că elementul 2^p este simetricul elementului 2^q în raport cu legea dată (unde $p, q \in \mathbb{R}$), să se calculeze $p^3 + q^3$.

a) 16 b) 2 c) 4 d) 32 e) 8 f) 24

AL 269 Pe mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + ad).$$

Să se determine elementele simetrizabile faţă de legea $*$ din mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

a) $(b, 1)$, $b \in \mathbb{Z}$ b) $(b, 0)$, $b \in \mathbb{Z}$ c) $(b, \pm 1)$, $b \in \mathbb{Z}$

d) $(\pm 1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$ e) $(0, b)$, $b \in \mathbb{Z}$ f) $(1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$

AL 270 Pe mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie $*$ prin relaţia

$$x * y = xy + 2(x + y + 1), \quad (\forall)\, x, y \in \mathbb{Z}.$$

Care dintre următoarele propoziţii este adevărată?

a) Legea $*$ nu este asociativă.
b) $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ şi 2 este elementul neutru al monoidului.
c) $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ şi -2 este element simetrizabil.
d) $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ şi 3 este elementul neutru al monoidului.
e) $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ şi -3 este element simetrizabil.
f) $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian.

AL 271 Pe mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră legea de compoziţie asociativă şi comutativă $*$ definită prin

$$A * B = AB - 2A - 2B + 6I_2.$$

Să se studieze simetrizabilitatea elementelor lui $\mathcal{M}$ în raport cu legea $*$. Dacă A' desemnează simetricul elementului A, să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată:

a) În mulţimea $\mathcal{M}$ nu există element element neutru în raport cu $*$.
b) I_2 este element neutru în raport cu $*$ şi $A' = A^{-1}$ $(\forall)\, A \in \mathcal{M}$.
c) $3I_2$ este element neutru şi toate elementele din $\mathcal{M}$ sunt simetrizabile.
d) $3I_2$ este element neutru şi $(\forall)\, A \in \mathcal{M}$ cu $x \neq 2$ este simetrizabil.
e) I_2 este element neutru şi $A' = (A - 2I_2)^{-1} + 2I_2$.
f) $-I_2$ este element neutru şi toate elementele din $\mathcal{M}$ sunt simetrizabile.

AL 272 Pe mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = 3xy - 3x + 3(a^2 - 2)y - a + 3$$

pentru orice $x, y \in G$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(G, *)$ este grup.

a) 0 b) 2 c) -1 d) 1 e) -2 f) 3

AL 273 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$$G = \left\{ M(x) = I_3 + xA^2, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Să se determine valoarea parametrului a pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = I_3 + xA^2$ este morfism între $(\mathbb{R}, *)$ şi $(G, \cdot)$, unde relaţia " $*$ " este definită prin $x * y = x + y + axy$, $a \in \mathbb{R}$, iar " $\cdot$ " este înmulţirea matricelor.

a) 1 b) -1 c) 4 d) -4 e) 25 f) -25

AL 274 Fie $\mathbb{R}^*$ dotată cu legea de compoziţie definită prin $a * b = kab$, $k \in \mathbb{R}$ şi mulţimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

dotată cu înmulţirea matricelor " $\cdot$ ". Să se determine mulţimea valorilor lui k pentru care funcţia

$$f : \mathbb{R}^* \to M, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$$

este un morfism între grupurile $(\mathbb{R}^*, *)$ şi $(M, \cdot)$.

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Q}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 275 Fie $G=(1,+\infty)$ care are o structură de grup faţă de operaţia "$*$" definită prin

$$x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}.$$

Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f:(0,+\infty)\to G,\quad f(x)=\sqrt{ax+b}$$

să fie un izomorfism de la grupul $((0,+\infty),\cdot)$ la grupul $(G,*)$.

a) $a=0,\ b=2$ b) $a=1,\ b\in\{1,2\}$ c) $a=0,\ b=1$
d) $a=0,\ b\in\{1,2\}$ e) $a=1,\ b=2$ f) $a=b=1$

AL 276 Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie

$$x\perp y=x+y-5 \text{ şi } x\top y=x+y+5.$$

Să se determine toate perechile $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=ax+b$ să fie un izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z},\perp)$ şi $(\mathbb{Z},\top)$.

a) $(1,-10),\ (-1,0)$ b) $(1,-10)$ c) $(-1,-10)$
d) $(-1,0)$ e) $(1,0),\ (-1,-10)$ f) $(1,0)$

AL 277 Fie $a,b\in\mathbb{Z}_5$, $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5$, $f_{a,b}(x)=ax+b$, $a\neq\widehat{0}$. Să se găsească toate funcţiile $f_{a,b}$ pentru care are loc

$$f^4_{a,b}=f^{2018}_{\widehat{2},\widehat{0}}\circ f^{2020}_{\widehat{2},\widehat{2}}\circ f^{2022}_{\widehat{2},\widehat{4}},$$

unde $f^n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{de\ n\ ori}$.

a) $f_{\widehat{2},\widehat{2}}$ b) $f_{\widehat{1},\widehat{2}}$ c) $f_{\widehat{1},\widehat{4}}$; $f_{\widehat{2},\widehat{1}}$ d) $f_{\widehat{3},\widehat{0}}$ e) $f_{\widehat{2},\widehat{0}}$ f) $f_{\widehat{4},\widehat{0}}$

AL 278 Fie legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y + \widehat{10} \quad \text{şi} \quad x \top y = xy - \widehat{3}x - \widehat{3}y - \widehat{1}.$$

Să se determine cele două elemente neutre ale inelului $(\mathbb{Z}_{13}, \perp, \top)$.

a) $e_\perp = \widehat{10}$, $e_\top = \widehat{3}$ b) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{3}$ c) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{6}$

d) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{4}$ e) $e_\perp = \widehat{4}$, $e_\top = \widehat{3}$ f) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{11}$

AL 279 Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se determine mulţimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$.

a) $\mathbb{Z}[i]$ b) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ c) $\{1, i\}$

d) $\{\pm 1, \pm i\}$ e) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{1, i\}$ f) $\varnothing$

AL 280 Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = ax + by - 7 \quad \text{şi} \quad x \top y = xy - 7x - 7y + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ să fie un inel.

a) $a = b = c = 17$ b) $a = b = 1$, $c = 56$ c) $a = b = c = 7$

d) $a = b = 1$, $c = 7$ e) $a = b = c = 1$ f) $a = b = c = -1$

AL 281 Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie

$$x * y = x + y - 2 \ \text{ şi } \ x \circ y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ şi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe izomorfismul $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ \ f(x) = ax + b, \ a \neq 0, \ a, b \in \mathbb{Z}$.

a) $a = 1, b = 0$ b) $a = 1, b = 1$ c) $a = 1, b = 2$

d) $a = 2, b = 1$ e) $a = 1, b = -2$ f) $a = -1, b = 2$

AL 282 Fie sistemul

$$\begin{cases} \widehat{4}x + \widehat{3}y = \widehat{6} \\ \widehat{3}x + \widehat{2}y = \widehat{1} \end{cases}$$

în $\mathbb{Z}_{11}$ cu soluţia (x_0, y_0). Dacă y_0' este inversul lui y_0 în corpul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, să se determine $m \in \mathbb{Z}_{11}$ astfel încât $\widehat{3}x_0^2 + my_0' = x_0$.

a) $\widehat{5}$ b) $\widehat{1}$ c) $\widehat{3}$ d) $\widehat{4}$ e) $\widehat{10}$ f) $\widehat{9}$

AL 283 Să se determine $a \in \mathbb{Z}_8$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} a^2x + y = \widehat{5} \\ \widehat{3}x + ay = \widehat{7} \end{cases}$$

are soluţia $(\widehat{3}, \widehat{2})$ şi să se specifice numărul total al soluţiilor.

a) $a = \widehat{2}$, 5 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii b) $a = \widehat{4}$, 7 soluţii; $a = \widehat{6}$, 3 soluţii
c) $a = \widehat{1}$, 3 soluţii; $a = \widehat{5}$, 8 soluţii d) $a = \widehat{3}$, 8 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii
e) $a = \widehat{1}$, 5 soluţii; $a = \widehat{5}$, 3 soluţii f) $a = \widehat{3}$, 6 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii

AL 284 În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ să se rezolve ecuaţia

$$X^{2021} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

AL 285 Fie mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{4}x \\ \widehat{6}x & \widehat{1} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_{12} \right\}.$$

Să se determine toate soluţiile ecuaţiei $A^2(x) + 2A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{4} \\ \widehat{0} & \widehat{3} \end{pmatrix}$.

a) $A(\widehat{7})$ b) $A(\widehat{3})$

c) $A(\widehat{2})$, $A(\widehat{5})$, $A(\widehat{8})$ d) $A(\widehat{1})$, $A(\widehat{4})$

e) $A(\widehat{0})$ f) nu are soluţii

AL 286 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

Să se determine A^{-1}.

a) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$

AL 287 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} m & \widehat{0} & \widehat{1} \\ m & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$. Să se afle $m \in \mathbb{Z}_3$ pentru care A este inversabilă şi să se determine A^{-1}.

a) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ b) $m = \widehat{1}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

c) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ d) $m = \widehat{2}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

e) $m = \widehat{1}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ f) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

AL 288 Fie polinoamele $f = X^3+2X^2-X-5$ şi $g = X^2+1$. Să se determine câtul c şi restul r ale împărţirii lui f la g.

a) $c = X+2,\ r = 0$
b) $c = X^2+1,\ r = X+2$
c) $c = X+2,\ r = -2X-7$
d) $c = -2X-7,\ r = X+2$
e) $c = X+1,\ r = -2$
f) $c = X-1,\ r = 0$

AL 289 Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a şi b ştiind că -1 este rădăcină a polinomului f şi restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este 6. Să se găsească apoi restul împărţirii lui f la $X^2 - X - 2$.

a) $a = 1,\ b = 4,\ X+1$
b) $a = -1,\ b = 4,\ 2X+2$
c) $a = 1,\ b = 4,\ 2X+2$
d) $a = -1,\ b = 2,\ 2X+1$
e) $a = 1,\ b = 2,\ X+2$
f) $a = -1,\ b = 4,\ X-1$

AL 290 Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărţirii polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ la X^2+2 să fie $X+1$ şi restul împărţirii lui f la $X+1$ să fie 3.

a) $a = 3,\ b = 2,\ c = 5$
b) $a, b, c \in \varnothing$
c) $a = -2,\ b = 3,\ c = 5$
d) $a = 2,\ b = 3,\ c = 5$
e) $a = 3,\ b = 2,\ c = -5$
f) $b = 3,\ c = 2a+1,\ a \in \mathbb{R}$

AL 291 Se consideră polinomul $f = X^6 + aX^5 + bX^4 + cX^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c pentru care polinomul f se divide cu polinomul $g = X^5 - 5X^3 + 4X$.

a) $a, b, c \in \varnothing$
b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
c) $a = b = c = 0$
d) $a = c = 1,\ b = -1$
e) $a = c = -1,\ b = 1$
f) $a = 1,\ b = -5,\ c = 4$

AL 292 Să se determine polinomul cu coeficienţi raţionali de grad minim care împărţit la X^2+2X-3 dă restul $3X+11$ şi împărţit la X^2-4X+5 dă restul $7X-3$.

a) $-X^3-4X+12$	b) $X^3+2X-17$	c) $-X^3+4X+11$
d) $X^3-4X+17$	e) $X^3+3X+15$	f) $-X^3+17X-5$

AL 293 Se consideră polinoamele

$$f=(X-2014)(X-2016) \text{ şi } g=(X-2015)^{2014}+X-2001.$$

Să se determine restul împărţirii lui g la f.

a) X	b) 0	c) $X-2000$
d) $X+2014$	e) $2016\cdot 2014$	f) $X-2016$

AL 294 Să se determine parametrii reali a,b,c pentru care polinomul $f=(X-1)^7+a(X-1)^4+bX+c$ se divide cu $(X+1)^3$.

a) $a=28,\ b=448,\ c=128$	b) $a=56,\ b=448,\ c=576$
c) $a=56,\ b=320,\ c=81$	d) $a=28,\ b=448,\ c=192$
e) $a=84,\ b=320,\ c=81$	f) $a=28,\ b=320,\ c=128$

AL 295 Să se determine parametrii reali m şi n astfel încât polinomul X^9+mX^2+n să se dividă cu polinomul X^2+X+1.

a) $m=0,\ n=0$	b) $m=0,\ n=-1$	c) $m=-1,\ n=0$
d) $m=-1,\ n=-1$	e) $m=1,\ n=0$	f) $m=0,\ n=1$

AL 296 Să se determine restul împărţirii polinomului X^n la polinomul X^2+2X-3.

a) $\dfrac{1-(-3)^n}{4}X+\dfrac{3+(-3)^n}{4}$
b) $\dfrac{1}{4}[(1+(-3)^n)X+3+(-3)^n]$
c) $\dfrac{1-(-3)^n}{4}X+\dfrac{3-(-3)^n}{4}$
d) $\dfrac{2-(-3)^n}{4}X+\dfrac{3+(-3)^n}{4}$
e) $\dfrac{1-(-3)^n}{4}X+\dfrac{3+3^n}{4}$
f) $\dfrac{1}{4}[(1+3^n)X+3+(-3)^n]$

AL 297 Să se determine restul împărţirii polinomului $(X^3+X+1)^{19}$ la polinomul X^2-X+1.

a) -1 b) X c) $X+1$ d) 0 e) $X-1$ f) 1

AL 298 Să se determine parametrul $a\in\mathbb{R}$ şi să se rezolve ecuaţia

$$x^4+ax^3+4x^2-6x+4=0,$$

ştiind că două dintre rădăcinile sale sunt opuse.

a) $a=-3$, $\{1,2,\pm\sqrt{2}i\}$
b) $a=-1$, $\{\pm1,\pm2\}$
c) $a=2$, $\{1,2,\pm2i\}$
d) $a=-2$, $\{1\pm i,\pm1\}$
e) $a=-1$, $\{\pm2,\pm i\}$
f) $a=-3$, $\{\pm1,\pm\sqrt{2}i\}$

AL 299 Fie polinomul $f=X^4+a^2X^3-7X^2+aX+6$. Să se determine mulţimea valorilor întregi ale lui a astfel încât f să aibă o rădăcină întreagă impară.

a) $\varnothing$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left\{-1,\dfrac{8}{9}\right\}$
d) $\left\{-1,0,\dfrac{8}{9}\right\}$ e) $\{-1,0\}$ f) $\{-1\}$

AL 300 Fie polinomul $f=X^3+X^2-2X-2$. Să se determine descompunerea lui f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

a) $(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ b) $(X-1)(X^2+2)$

c) $(X+1)(X^2-2)$ d) $(X-1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

e) $(X+1)(X-2)(X+2)$ f) $(X+1)(X^2+2)$

AL 301 Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

a) $(X+\widehat{4})^2(X^2+X+\widehat{1})$ b) $(X+\widehat{4})(X+\widehat{2})(X^2+\widehat{1})$

c) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})^2(X+\widehat{1})$ d) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})(X^2+\widehat{1})$

e) $(X+\widehat{2})^2(X^2+X+\widehat{1})$ f) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{4})(X^2+X+\widehat{1})$

AL 302 Fie polinomul $f = (1-2X)^{2017} + (3X-2)^{2017}$. Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

a) 2017 b) 4034 c) 0 d) 2^{2017} e) 3^{2017} f) $(-1)^{2017}$

AL 303 Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$$

să admită soluţia $1+i$ şi să se găsească celelalte soluţii.

a) $a=-6$, $b=12$, $\{1-i,-1,-6\}$ b) $a=-3$, $b=6$, $\{1-i,1+i,-1\}$

c) $a=12$, $b=-6$, $\{1-i,1,12\}$ d) $a=6$, $b=-12$, $\{1+i,-1,-3\}$

e) $a=-6$, $b=12$, $\{1-i,-1,6\}$ f) $a=4$, $b=6$, $\{1+i,1,6\}$

AL 304 Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ având coeficientul dominant 1. Ştiind că

$$xP(x-1) = (x-3)P(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se determine $P(5)$.

a) 0 b) 10 c) 20 d) 30 e) 50 f) 60

AL 305 Fie polinomul $P = X^3 + mX^2 + nX - a^3$, unde $m, n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Ştiind că $P(a-x)+P(a+x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se determine $P(2017)$.

a) 0 b) a c) $(2017 - a)^3$ d) 2017^3 e) a^3 f) 2017

AL 306 Polinoamele cu coeficienţi reali $aX^2 + bX + c$, $aX^3 + bX^2 + bX + a$ şi $aX^3 + cX^2 + cX + a$, $a \neq 0$, admit o rădăcină comună dacă şi numai dacă:

a) $a, b, c \in \mathbb{R}$ b) $a + b + c = 0$, $b \neq c$

c) $a - b + c = 0$, $b \neq c$ d) $a + b - c = 0$

e) $-a + b + c = 0$ f) $-a + b + c = 0$, $a \neq b$

AL 307 Fie polinoamele $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ şi $Q = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Să se calculeze suma soluţiilor ecuaţiei $P(Q(x)) = 0$.

a) 0 b) $\dfrac{a}{b}$ c) $\dfrac{6-3b}{a}$ d) $\dfrac{b}{a}$ e) $\dfrac{1-b}{a}$ f) 1

AL 308 Fie polinoamele P şi Q cu proprietatea $P(x) = Q(x) + Q(1 - x)$. Ştiind că P are coeficienţi naturali şi $P(0) = 0$, să se determine $P(P(3))$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 309 Fie polinoamele P şi $Q \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea

$$P(x) = Q(x) + Q(1 - x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$. Ştiind că P are coeficientul dominant 1, gradul cel mult 5 şi rădăcinile -1 şi 0, să se determine $P(3)$.

a) 60 b) 0 c) 24 d) -24 e) -60 f) 1

AL 310 Fie polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $P(x) = -P(-x)$, iar restul împărţirii lui P la $X - 7$ este 3. Să se determine restul împărţirii lui P la $X^2 - 7X$.

a) 3 b) $\frac{3}{7}X$ c) $\frac{1}{7}X+2$ d) $X-4$ e) 0 f) $-X+10$

AL 311 Fie polinomul $P = X^4 - \sqrt{3}mX + n$, $m, n \in \mathbb{Q}$. Să se determine valorile parametrilor m, n, ştiind că restul împărţirii lui $P(X+2)$ la $X+1$ este $3-\sqrt{3}$.

a) $m = 0$, $n = 1$ b) $m = 1$, $n = 1$ c) $m = 1$, $n = 2$

d) $m = 2$, $n = 1$ e) $m = 2$, $n = 2$ f) $m = 1$, $n = 0$

AL 312 Ştiind că polinomul $P = X^3 + pX + q$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 \\ x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 \\ x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 \end{vmatrix}.$$

a) p b) q c) pq d) $9pq$ e) $\frac{p}{q}$ f) $\frac{q}{p}$

AL 313 Dacă polinoamele $f_i \in \mathbb{C}[X]$,

$$f_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}X^{k-1}, \quad i = \overline{1,3},$$

au o rădăcină comună, să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

a) -1 b) $(a_{12} - a_{23})(a_{13} - a_{32})(a_{23} - a_{31})$

c) $3a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12} - a_{23} - a_{31}$ d) 0

e) 1 f) $a_{12}a_{23}a_{31}$

AL 314 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix},$$

unde x_i, $i = \overline{1,3}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - x^2 - 11 = 0$.

a) -1 b) 0 c) 1 d) 11 e) -11 f) 2

AL 315 Fie ecuaţia $x^3 - ax + a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, cu soluţiile x_1, x_2, x_3. Să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

a) 0 b) $-a^2$ c) a^2 d) $2a^2$ e) $-3a^2$ f) $-2a^2$

AL 316 Ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $3x^3 - 17x - 15 = 0$, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1x_2 + x_3 & x_1 + x_2 & -x_1x_2 \\ x_2x_3 + x_1 & x_2 + x_3 & -x_2x_3 \\ x_3x_1 + x_2 & x_3 + x_1 - x_2 & x_2 - x_3x_1 \end{vmatrix}.$$

a) 0 b) 3 c) -17 d) $\dfrac{17}{3}$ e) 7 f) -5

AL 317 Se consideră ecuaţia $x^3 - 4x^2 + 10 = 0$ cu soluţiile x_1, x_2, x_3 şi determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Să se determine valoarea lui Δ^2.

a) 140 b) 36 c) 144 d) -140 e) -36 f) -144

AL 318 Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$. Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 i & a_1 - b_1 i & b_1 - c_1 \\ a_2 + b_2 i & a_2 - b_2 i & b_2 - c_2 \\ a_3 + b_3 i & a_3 - b_3 i & b_3 - c_3 \end{vmatrix},$$

unde a_k, b_k, c_k sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 + \alpha_k = 0$, $k = \overline{1,3}$.

a) $(a_1 + b_1)(b_2 + c_2)(c_3 + a_3)$ b) $a_1 b_2 c_3$

c) 0 d) 1

e) $a_1 + a_2 + a_3 + i(c_1 + c_2 + c_3)$ f) $(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)(b_3 - c_3)$

AL 319 Fie $f = X + a$ şi $g = X^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea minimă a lui

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(2) & g(2) \\ 1 & f(3) & g(3) \\ 1 & f(x) & g(x) \end{vmatrix}, \ x \in \mathbb{R}.$$

a) $\frac{5}{2}$ b) 0 c) $-\frac{1}{4}$ d) $-(a+b+c)^2$ e) 1 f) abc

AL 320 Suma soluţiilor comune ale ecuaţiilor

$$x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 = 0,$$

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

este:

a) 1 b) 0 c) $2\sqrt{5}$ d) 3 e) $1 + \sqrt{5}$ f) $\sqrt{5}$

AL 321 Să se determine parametrii reali a, b şi c astfel încât polinomul

$$f = X^4 + aX^3 + bX + c$$

să fie divizibil cu $g = (X-1)^2 (X+2)$.

a) $a = 1, b = -1, c = -2$
b) $a = 3, b = -3, c = -2$
c) $a = -2, b = 2, c = -1$
d) $a = 3, b = 1, c = 2$
e) $a = 2, b = -3, c = 2$
f) f nu este divizibil prin g, $(\forall)\, a, b, c \in \mathbb{R}$

AL 322 Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condiţiile:
(i) $P + 1$ este divizibil cu $(X-1)^3$;
(ii) $P - 1$ este divizibil cu $(X+1)^3$.
Să se calculeze $P(0)$.

a) 1 b) -1 c) 0 d) 2017 e) -2017 f) 2

AL 323 Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condiţiile:
(i) $P + X$ este divizibil cu $\left(X - \sqrt{2}\right)^2$;
(ii) $P - X$ este divizibil cu X^3.
Să se calculeze $P(2)$.

a) 2 b) 1 c) 3 d) -2 e) 4 f) -1

AL 324 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie injectivă. Să se determine suma coeficienţilor polinomului $P \in \mathbb{R}[X]$ care satisface relaţia

$$-2x + 4 + 5f(x+2) = 4f(3x-2) + f(2x - 7P(x-1)),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) 1 b) 2 c) 0 d) -1 e) -2 f) 3

AL 325 Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluţiile ecuaţiei $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. Dacă $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, atunci ele verifică relaţia:

a) $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2$
b) $x_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ i = \overline{1,4}$
c) $x_1x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$
d) $x_1x_2x_3 - x_4 = -2$
e) $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2$
f) $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$

AL 326 Fie polinomul $f = X^3 - mX^2 + 2X + 3$, $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine mulţimea valorilor parametrului m pentru care are loc relaţia

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \ .$$

a) $\varnothing$ b) $\{1\}$ c) $\{0\}$ d) $\left\{\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\right\}$ e) $\left\{\pm\sqrt{\frac{3}{10}}\right\}$ f) $\left\{\pm\frac{10}{3}\right\}$

AL 327 Fie polinomul $f = X^4 - 5X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 şi x_4. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{1}{2 - x_1} + \frac{1}{2 - x_2} + \frac{1}{2 - x_3} + \frac{1}{2 - x_4} \ .$$

a) 0 b) 1 c) 23 d) $\frac{21}{23}$ e) $\frac{23}{21}$ f) $-\frac{21}{23}$

AL 328 Fie polinomul $f = X^3 + 5X + 3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine polinomul care are ca rădăcini pe x_1^2, x_2^2, x_3^2.

a) $X^3 + 15X^2 + 10X - 7$ b) $X^3 - 5X^2 + 25X + 5$

c) $X^3 + 10X^2 + 25X - 9$ d) $X^3 - 10X^2 - 5X + 3$

e) $X^3 + 15X^2 - 5X + 5$ f) $X^3 - 10X^2 + 25X - 9$

AL 329 Să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ştiind că soluţiile ecuaţiei

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 64 = 0$$

sunt numere naturale în progresie geometrică cu raţia număr natural.

a) $a = 5$, $b = 67$, $c = 100$ b) $a = -15$, $b = 70$, $c = -120$

c) $a = 15$, $b = 70$, $c = 120$ d) $a = -5$, $b = 67$, $c = 100$

e) $a = 15$, $b = -70$, $c = 120$ f) $a = 5$, $b = -67$, $c = -100$

AL 330 Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Câte polinoame de forma $P(X) = X^2 + aX + b$ au proprietatea că rădăcinile lor satisfac condiţiile $x_1^3 = x_2$ şi $x_2^3 = x_1$?

a) niciunul b) 100 c) 4

d) 1000 e) o infinitate f) unul

AL 331 Fie polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 simple. Să se determine valoarea expresiei

$$x_1P'(x_1) + x_2P'(x_2) + x_3P'(x_3).$$

a) 0 b) $9c - a^2 + 2ab$ c) $2ab - a^3 - 9c$

d) $4ab - 9c - a^3$ e) $9c + a^2 - 4ab$ f) $c - a + bc$

AL 332 Împărţind polinomul X^8 la $X - 1$ se obţine câtul q_1 şi restul r_1, împărţind polinomul q_1 la $X - 1$ se obţine câtul q_2 şi restul r_2, iar continuând procedeul şi definind recursiv polinoamele q_{k+1} şi restul r_{k+1} ca fiind, respectiv, câtul şi restul împărţirii lui q_k la $X - 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., 7\}$, să se determine r_5.

a) 1 b) 2 c) 7 d) 70 e) 100 f) 700

AL 333 Fie α, β, γ soluţiile ecuaţiei $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. Să se determine $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma}$.

a) -3 b) $-\dfrac{1}{3}$ c) 0 d) $\dfrac{1}{3}$ e) 3 e) 27

PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ŞI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG)

TG 1 Să se calculeze $\sin^2 120° - \cos^2 30°$.

a) $-\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{2}$ c) -1 d) 0 e) 1 f) $\sqrt{3}$

TG 2 Fie $x \in (0, \pi)$ astfel încât $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Să se determine $\operatorname{tg} x$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) -1 f) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

TG 3 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{x}{2} + \cos x$. Să se calculeze $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

a) 1 b) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ e) 0 f) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

TG 4 Valoarea lui $a \in (0, \pi)$ pentru care $2\cos(\pi - a) - 1 = 0$ este:

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{3}$ c) $\dfrac{2\pi}{3}$ d) $\dfrac{5\pi}{6}$ e) $\dfrac{7\pi}{12}$ f) $\dfrac{5\pi}{12}$

TG 5 Să se calculeze $\sin(2x)$ ştiind că $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) 1 e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

TG 6 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$. Dacă $f(a) = \frac{1}{3}$, atunci $f\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$ este:

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) 1 d) -1 e) $\frac{2}{3}$ f) $-\frac{1}{3}$

TG 7 Să se rezolve ecuaţia trigonometrică

$$\cos x^\circ = -\cos 40^\circ \ ,$$

unde x este cuprins între 0 şi 360.

a) $x \in \{140, 220\}$ b) $x \in \{135, 200\}$ c) $x \in \{135, 315\}$

d) $x \in \{45, 315\}$ e) $x \in \{125, 320\}$ f) $x \in \{135, 345\}$

TG 8 Se consideră următoarele propoziţii matematice:

(i) $\sin 144^\circ = \cos 54^\circ$; (ii) $\cos 2018^\circ = -\cos 38^\circ$;

(iii) $\operatorname{tg}^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}$; (iv) $\sin^2 5^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 85^\circ = \frac{3}{2}$;

(v) $(\operatorname{ctg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 80^\circ) \cos 70^\circ = 2 \sin 110^\circ$.

Câte dintre acestea sunt false?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 9 Care dintre numerele

$a = \cos 55^\circ$, $b = \sin 155^\circ$, $c = \sin 15^\circ$, $d = \cos 170^\circ$, $e = \cos 100^\circ$, $f = \sin 106^\circ$

este cel mai aproape de zero?

a) a b) b c) c d) d e) e f) f

TG 10 Să se calculeze $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$, dacă $a, b \in (0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ satisfac condiţia $\cos a + \cos b = 0$.

a) $\operatorname{tg}(a+b)+1$ b) 1 c) $2\operatorname{tg} a$ d) 0 e) -1 f) $2\operatorname{tg} b$

TG 11 Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $\cos\frac{a}{2}$ este egal cu:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ f) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

TG 12 Fie x un număr real pentru care $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2$. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 1 d) -1 e) 3 f) -3

TG 13 Să se calculeze $\cos\frac{3a}{2}$, ştiind că $\sin\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ şi $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

TG 14 Să se calculeze suma valorilor lui $x \in [0, \pi]$ ce verifică ecuaţia

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0.$$

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) π f) $\frac{3\pi}{2}$

TG 15 Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$. Să se calculeze $\sin x$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{4}$

TG 16 Să se determine valoarea maximă a expresiei

$$E(x) = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

a) 2 b) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e) 1 f) $\frac{3}{2}$

TG 17 Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x - m}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f, iar $m \in \{-2, -\sqrt{2}, -1, 2\sqrt{2}, \pi\}$. Pentru câte dintre valorile lui m avem că $D = \mathbb{R}$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 18 Fie $x \in [0, 2\pi]$ astfel încât $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4}$. Să se calculeze $\cos 4x$.

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) 1

TG 19 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$. Să se determine raportul dintre valoarea maximă şi valoarea minimă a funcţiei f.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 4 e) 7 f) 8

TG 20 Fie $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$. Să se calculeze $\sin x - \cos x$.

a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

TG 21 Fie $x \in \left(-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x = 1$. Să se calculeze $\cos 8x$.

a) -1 b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}$

TG 22 Să se calculeze $\cos(x+2y)$ ştiind că $x = \dfrac{4\pi}{3}$ şi $\operatorname{tg} y = 2-\sqrt{3}$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) 0 f) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

TG 23 Fie a şi b două numere reale astfel încât

$$\sin a + \sin b = 1 \text{ şi } \cos a + \cos b = \frac{1}{2}.$$

Să se calculeze $\cos(a-b)$.

a) $\dfrac{3}{8}$ b) $-\dfrac{3}{8}$ c) $\dfrac{1}{8}$ d) $-\dfrac{1}{8}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $-\dfrac{1}{2}$

TG 24 Fie funcţia $f : \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - \sin x$. Să se determine cea mai mică valoare a lui f.

a) -1 b) -3 c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{2}$ e) $-\dfrac{1}{2}$ f) -2

TG 25 Fie $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. Să se determine imaginea funcţiei f.

a) $(-1, \sqrt{3}]$ b) $(-1, 2]$ c) $[-1, 2]$
d) $(-\sqrt{3}, 1]$ e) $[-1, \sqrt{3}]$ f) $(-\sqrt{3}, 1)$

TG 26 Aria unui triunghi dreptunghic isoscel ABC, $AB = AC$, este egală cu 8. Să se calculeze lungimea ipotenuzei.

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) 4 e) $4\sqrt{2}$ f) 8

TG 27 Lungimile laturilor unui triunghi sunt $3, 3\sqrt{3}, 6$. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului.

a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) 3 f) $2\sqrt{3}$

TG 28 Să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul dreptunghic de catete 5 şi 12.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $2\sqrt{3}$ f) 3

TG 29 Fie triunghiul ABC cu $AC = 5$, $AB = 8$ şi $\cos A = \dfrac{1}{4}$. Să se calculeze lungimea laturii BC.

a) $\sqrt{69}$ b) $\sqrt{109}$ c) $\sqrt{89}$ d) 89 e) 109 f) 69

TG 30 Fie triunghiul PQR cu $PQ = 4$, $QR = 5$ şi $RP = 7$. Să se determine $\cos(\widehat{PQR})$.

a) $\dfrac{29}{35}$ b) $-\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{7}$ d) $\dfrac{4}{7}$ e) $\dfrac{5}{7}$ f) $-\dfrac{4}{7}$

TG 31 În triunghiul ABC, $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$, $\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze $\sin B$.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{1}{3}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

TG 32 Aria triunghiului ABC este $10\ m^2$. Să se determine AB ştiind că $AC = 4\ m$ şi unghiul $\widehat{BAC}$ are $30°$.

a) $\dfrac{10}{3}\ m$ b) $5\ m$ c) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}\ m$ d) $10\ m$ e) $20\ m$ f) $8\ m$

TG 33 Într-un cerc cu raza de 4 cm se înscrie un triunghi ABC ce are unghiul $\widehat{ABC}$ de 30°. Să se determine lungimea laturii $[AC]$.

a) 2 cm b) 3 cm c) 4 cm d) $4\sqrt{3}$ cm e) $3\sqrt{3}$ cm f) $2\sqrt{3}$ cm

TG 34 Fie triunghiul ABC cu $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 6$ şi $\operatorname{tg} A = -\sqrt{2}$. Să se afle lungimea lui BC.

a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$ f) $6\sqrt{3}$

TG 35 Fie triunghiul ABC cu $AB = 3$, $BC = 8$, $CA = 7$. Dacă punctul P aparţine laturii BC astfel încât $BP = 6$, să se calculeze AP.

a) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ c) $3\sqrt{3}$ d) 5 e) $3\sqrt{7}$ f) $4\sqrt{3}$

TG 36 Triunghiul ascuţitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ şi aria egală cu $16\sqrt{2}$. Să se determine valoarea lui $\sin C$.

a) $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$ b) $\dfrac{4\sqrt{39}}{39}$ c) $\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$ d) $\dfrac{4\sqrt{37}}{37}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{17}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

TG 37 Un triunghi are aria $2\sqrt{3}$, perimetrul 12 şi un unghi de 60°. Să se afle lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 38 Fie punctele A, B, C astfel încât $AB = 5$, $AC = 8$ şi $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Să se calculeze lungimea minimă pe care o poate avea un segment $[AP]$ atunci când P este un punct variabil pe dreapta BC.

a) 5 b) $7 - \sqrt{3}$ c) $\dfrac{20}{7}$ d) $\dfrac{20\sqrt{3}}{7}$ e) $\dfrac{20}{\sqrt{89} + 40\sqrt{3}}$ f) 4

TG 39 Se consideră triunghiul ABC cu $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ şi $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$. Să se determine lungimea bisectoarei $(AD), D \in (BC)$, a unghiului $\widehat{BAC}$.

a) $3 - \sqrt{6}$ b) $\sqrt{2} - 6$ c) $\sqrt{6} - 2$
d) $3\sqrt{6} - 6$ e) $\sqrt{6} - 6$ f) $3\sqrt{6} - 3$

TG 40 Triunghiul ABC are o latură de $9\,cm$ şi perimetrul de $50\ cm$. Să se calculeze aria maximă pe care o poate avea triunghiul.

a) $90\ cm^2$ b) $120\ cm^2$ c) $120\sqrt{2}\ cm^2$
d) $200\ cm^2$ e) $400\ cm^2$ f) $300\sqrt{2}\ cm^2$

TG 41 Fie G centrul de greutate al triunghiului echilateral ABC ce are aria egală cu 18. Se notează cu $\mathcal{M}_G$ mulţimea punctelor din interiorul triunghiului situate mai aproape de G decât de oricare dintre vârfurile triunghiului. Să se calculeze aria mulţimii $\mathcal{M}_G$.

a) 6 b) $6\sqrt{3}$ c) 9 d) $9\sqrt{3}$ e) 12 f) 15

TG 42 Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu $AD \cap BE = \{O\}$. Se consideră afirmaţiile:

(i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0}$; *(ii)* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$;
(iii) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0}$; *(iv)* $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{CD}$;
(v) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}$; *(vi)* $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Câte dintre afirmaţiile date sunt corecte?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

TG 43 Fie P şi Q mijloacele bazelor AB şi CD ale trapezului $ABCD$. Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{PQ}$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{3}{2}$ d) 2 e) $\dfrac{5}{2}$ f) 3

TG 44 În triunghiul echilateral ABC de latură 3, punctele P şi Q împart latura BC în trei părţi egale. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $2\sqrt{3}$ f) $3\sqrt{3}$

TG 45 În sistemul cartezian de axe de coordonate se consideră punctele $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(7,2)$ şi $C(a,b)$. Dacă $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$, atunci $a - b$ este:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2 f) 3

TG 46 În sistemul cartezian de axe de coordonate se consideră punctele $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,4)$ şi M mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$, atunci $a + b$ este:

a) 8 b) 10 c) 4 d) 7 e) 9 f) 6

TG 47 Fie vectorii $\vec{u} = \vec{i} + (a+1)\vec{j}, \vec{v} = -b\vec{i} + 4\vec{j}, \vec{w} = (2a+4)\vec{i} - 4b\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, să se calculeze $a - b$.

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2 f) 3

TG 48 Se consideră vectorii coliniari $\vec{u} = -b\vec{i} + (a+1)\vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i} - 2b\vec{j}$ şi $\vec{w} = (2a+2)\vec{i} + 2\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$. Să se calculeze $a + b$.

a) -4 b) -3 c) -1 d) 2 e) 3 f) 4

TG 49 Se consideră vectorii $\overrightarrow{PA} = 4\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{PB} = 2\vec{i}+2\vec{j}$, respectiv $\overrightarrow{PC} = \vec{i}+a\vec{j}$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui a pentru care punctele A, B, C sunt coliniare.

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) 1 f) 3

TG 50 Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $M(1,1)$, $N(5,-1)$, $P(3,5)$ sunt mijloacele laturilor sale.

a) $4\sqrt{5}$ b) $12\sqrt{5}$ c) $8\sqrt{5}+4\sqrt{10}$

d) 30 e) $8\sqrt{5}+12$ f) $6\sqrt{5}+14$

TG 51 Să se determine valoarea parametrului real a pentru care dreptele AB şi CD sunt perpendiculare, unde $A(1,3)$, $B(-2,4)$, $C(-5,-1)$ şi $D(0,a)$.

a) 1 b) 2 c) 6 d) 7 e) 14 f) 15

TG 52 Fie punctele $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $P(a,2)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a ştiind că P aparţine dreptei AB.

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3 f) 8

TG 53 Se dau punctele $A(2,3), B(-1,2)$ şi $C(3,6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia medianei din A în triunghiul ABC. Să se calculeze $m+n$.

a) 6 b) 4 c) -6 d) -4 e) 3 f) -3

TG 54 Se dă triunghiul ABC cu $A(-1,3)$, $B(-2,-4)$, $C(2,6)$. Să se calculeze distanţa de la punctul $O(0,0)$ la punctul de intersecţie dintre dreapta suport a medianei din A şi dreapta suport a înălţimii din B.

a) $2\sqrt{65}$ b) $\sqrt{218}$ c) $3\sqrt{34}$ d) 16 e) $8\sqrt{5}$ f) $8\sqrt{6}$

TG 55 Pornind din punctul A de coordonate $(6,-1)$, un punct mobil notat P se îndepărtează cu viteză constantă de acesta, echidistant faţă de dreapta $d: x+2y+2=0$, traversând primul cadran. Să se calculeze distanţa parcursă de P între cele două axe de coordonate.

a) $\dfrac{9}{2}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 4 d) $\dfrac{\sqrt{89}}{2}$ e) $3\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{6}$

TG 56 Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele $d_1 : 3x + 4y - 2 = 0$ şi $d_2 : y = mx - \frac{1}{m}$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

a) 1 b) $\frac{2}{3}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 3 f) $2\sqrt{2}$

TG 57 Fie punctele $A(0, 4)$ şi $B(4, 0)$. Punctul $C(a, b)$ aparţine segmentului $[AB]$ astfel ca $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Să se calculeze $a - b$.

a) $\frac{3}{4}$ b) $4\sqrt{5} - 8$ c) $\frac{4}{3}$ d) 1 e) $2\sqrt{2} - 2$ f) $2\sqrt{5} - 4$

TG 58 Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $DA \perp AB$, $AB = 6$, $AD = CD = 3$. Dacă M este mijlocul lui (AB) şi $N \in (DC)$ cu $CN = 1$, la ce distanţă de A se intersectează dreptele MN şi BC ?

a) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\frac{24}{5}$ e) $\frac{47}{10}$ f) 5

TG 59 Prin simetricul punctului $A(-2, 3)$ faţă de punctul $B(1, 2)$ se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Să se calculeze distanţa de la punctul A la dreapta d.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $4\sqrt{2}$ f) 5

TG 60 Fiecărui număr natural n i se asociază punctul P_n de coordonate $\left(\cos \frac{n\pi}{3}, \sin \frac{n\pi}{3}\right)$. Câte drepte ce conţin cel puţin două dintre punctele considerate pot fi construite?

a) 3 b) 6 c) 15 d) 30 e) 45 f) o infinitate

TG 61 Fie $O(0,0)$, $A(-1,4)$, $B(5,1)$. Să se afle coordonatele punctului C astfel ca simetricul lui faţă de dreapta AB să fie centrul de greutate al triunghiului AOB.

a) $\left(\frac{34}{15}, \frac{53}{15}\right)$ b) $(2,3)$ c) $\left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$

d) $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ f) $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

TG 62 Un punct din primul cadran se numeşte *bine plasat* dacă distanţa de la el la origine este un număr natural. Câte puncte *bine plasate* conţine dreapta $d : 2x + y - 4\sqrt{2} = 0$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 63 Fie P punctul egal depărtat de laturile triunghiului ABC, unde $A(1,1)$, $B(4,5)$ şi $C(5,4)$. Să se calculeze distanţa de la P la dreapta AB.

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{10+\sqrt{2}}{7}$ d) $\frac{10+\sqrt{2}}{14}$ e) $\frac{10-\sqrt{2}}{14}$ f) $\frac{2}{3}$

TG 64 Fie $A(2,0), B(0,4)$ şi $C(5,a)$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB. Dacă $Q(x_0, y_0)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, să se calculeze $x_0 - y_0$.

a) -1 b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}$ e) 1 f) 0

TG 65 Fie $A(3,0), B(0,3)$ şi fie $C(a,b)$ pe dreapta $x + y = 8$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB. Dacă $H(x_0, y_0)$ este ortocentrul triunghiului ABC, să se calculeze $x_0 + y_0$.

a) $\frac{24}{5}$ b) $\frac{16}{7}$ c) $\frac{17}{3}$ d) $\frac{12}{5}$ e) 6 f) 4

TG 66 Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x+1$, iar B proiecţia lui A pe dreapta de ecuaţie $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparţine dreptei:

a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$

d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$ f) $y = x + 1$

TG 67 Simetrica dreptei $d : y = 2-x$ faţă de punctul $A(2, -3)$ intersectează axele de coordonate în punctele P şi Q. Să se calculeze aria triunghiului POQ.

a) 8 b) 16 c) 6 d) 4 e) 10 f) 9

TG 68 Se consideră dreptele concurente $d_1 : x+2y-9 = 0$, $d_2 : x-2y+3 = 0$ şi $d_3 : 2x + ay - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. O dreaptă d ce trece prin punctul $O(0, 0)$ intersectează dreptele d_1, d_2, d_3 respectiv în punctele distincte A, B, C. Să se afle panta dreptei d astfel ca $(AB) \equiv (BC)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}$; 1 d) $-\frac{11}{2}$ e) -1 f) $-\frac{11}{2}$; 1

TG 69 Fie P mijlocul segmentului (AB), unde $A(4, 0)$ şi $B(0, 2)$, iar M, N proiecţiile punctului P pe Ox, respectiv Oy. Dacă Q este punctul de intersecţie a perpendicularei în B pe dreapta AB cu dreapta MP, iar R punctul de intersecţie a perpendicularei în A pe AB cu dreapta NP, să se calculeze aria patrulaterului $ABQR$.

a) $\frac{25}{2}$ b) $\frac{23}{2}$ c) 10 d) $\frac{5}{2}$ e) 25 f) 27

TG 70 Prin punctul A de intersecţie a dreptelor

$$d_1 : x + y - 2 = 0 \quad \text{şi} \quad d_2 : 2x - y - 4 = 0$$

se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Fie P un punct oarecare al dreptei d, diferit de A. Să se arate că raportul distanţelor de la P la d_1, respectiv la d_2 este constant şi să se determine valoarea lui.

a) $\dfrac{10}{3}$ b) 3 c) $\dfrac{13}{4}$ d) $\sqrt{10}$ e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 71 Fie punctele $A(2,1), B(6,1), C(4,5)$ şi mulţimea $\mathcal{M}_A$ a punctelor din primul cadran situate mai aproape de A decât de celelalte două puncte date. Să se calculeze aria mulţimii $\mathcal{M}_A$.

a) 12 b) 13 c) 14 d) $\dfrac{23}{2}$ e) $\dfrac{25}{2}$ f) $\dfrac{31}{2}$

TG 72 Prin simetricul punctului $A\,(4,2)$ faţă de punctul $B\,(-1,1)$ se construieşte o dreaptă d de pantă $\dfrac{3}{2}$. Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează d în punctul C. Să calculeze aria triunghiului ABC.

a) $\dfrac{49}{2}$ b) 13 c) 26 d) $\dfrac{39}{2}$ e) 36 f) $\dfrac{13}{2}$

TG 73 Mulţimea punctelor $P(x,y)$ aflate la distanţa r de punctul $Q(a,b)$ formează cercul de centru Q şi rază r. Să se determine ecuaţia ce descrie acest cerc.

a) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ b) $x^2+y^2-2ax-2ay-r^2=0$
c) $(x+a)^2+(y+b)^2=r^2$ d) $x^2+y^2+a^2+b^2-r^2=0$
e) $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ f) $x^2+y^2+2ax+2ay+a^2+b^2-r^2=0$

TG 74 Se consideră punctele $A(3,0)$ şi $B(0,4)$. Fie punctul Q situat în interiorul triunghiului OAB aflat la distanţa r de fiecare latură a acestuia. Să se determine care dintre următoarele ecuaţii este verificată de toate punctele $P(x,y)$ ce se află la distanţa r de punctul Q.

a) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ b) $x^2+y^2-x-y-\dfrac{1}{2}=0$
c) $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+3=0$ d) $x^2-y^2-2x-2y=0$
e) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ f) $x^2+y^2-2x-2y-1=0$

TG 75 Să se determine ecuaţia cercului cu centrul situat pe dreapta de ecuaţie $4x + y - 16 = 0$, ce trece prin punctele $A(4, 1)$ şi $B(6, 5)$.

a) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 43 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2x - 12y - 13 = 0$ f) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 15 = 0$

TG 76 Se consideră punctul $Q(1, 0)$ şi cercul de ecuaţie

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 100.$$

Dacă punctul $P_0(x_0, y_0)$ este situat pe cerc la distanţa maximă de Q, să se calculeze $x_0 + y_0$.

a) 12 b) 0 c) 14 d) 16 e) 24 f) 22

TG 77 Punctul $M(-2, 1)$ se roteşte în jurul punctului $O(0, 0)$ în sens trigonometric cu $60°$, obţinându-se astfel punctul $M'(a, b)$. Să se calculeze $4a - 2b$.

a) -5 b) 0 c) 5 d) -1 e) -2 f) -6

PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ (simbol AM)

AM 1 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Câte dintre următoarele propoziţii sunt adevărate?

P_1: $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton

P_2: $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit

P_3: $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent

P_4: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

P_5: $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ este crescător

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 2 Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 2}, (z_n)_{n\geq 1}, (w_n)_{n\geq 9}$ cu termenii generali

$$x_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{2^{2n}}, y_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{2^{2n}}, z_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2}, w_n = \frac{\sqrt{n!} + (-1)^n}{n!}.$$

Atunci:

a)
(x_n) este descrescător
(y_n) nu este monoton
(z_n) nu este monoton
(w_n) nu este monoton

b)
(x_n) nu este monoton
(y_n) nu este monoton
(z_n) este descrescător
(w_n) este descrescător

c) $\begin{array}{ll} (x_n) & \text{nu este monoton} \\ (y_n) & \text{nu este monoton} \\ (z_n) & \text{nu este monoton} \\ (w_n) & \text{nu este monoton} \end{array}$ d) $\begin{array}{ll} (x_n) & \text{este descrescător} \\ (y_n) & \text{este crescător} \\ (z_n) & \text{nu este monoton} \\ (w_n) & \text{este descrescător} \end{array}$

e) $\begin{array}{ll} (x_n) & \text{este descrescător} \\ (y_n) & \text{este descrescător} \\ (z_n) & \text{nu este monoton} \\ (w_n) & \text{nu este monoton} \end{array}$ f) $\begin{array}{ll} (x_n) & \text{nu este monoton} \\ (y_n) & \text{este descrescător} \\ (z_n) & \text{nu este monoton} \\ (w_n) & \text{este descrescător} \end{array}$

AM 3 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + n^{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

a) 1 b) 2 c) ∞ d) 0 e) $\frac{1}{10}$ f) $\sqrt{5}$

AM 4 Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{n\to\infty} 7^n \sin\frac{n!\pi}{49}$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) $\frac{1}{7}$ b) 0 c) $\frac{\pi}{7}$ d) 7 e) $\frac{1}{49}$ f) nu există

AM 5 Se considera limitele $L_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3n+5}-\sqrt{3n-5}\right)}$,
$L_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{4n+5}-\sqrt{3n-5}\right)}$ şi $L_3 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3n^2+5}-\sqrt{3n^2-5}\right)}$.
Atunci

a) $L_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, L_2 = \frac{1}{2}, L_3 = \infty$ b) $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0$

c) $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = 0, L_3 = 0$ d) $L_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, L_2 = \infty, L_3 = \infty$

e) $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = 0, L_3 = \infty$ f) $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = \frac{1}{2}, L_3 = 0$

AM 6 Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3+bn^2+a}-an+b\right)=13.$$

a) $a=-2, b=12$ b) $a=2, b=12$ c) $a=2, b=10$
d) $a=2, b=8$ e) $a=-2, b=13$ f) $a=2, b=6$

AM 7 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

a) ∞ b) 1 c) 0 d) $\dfrac{1}{e}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) e

AM 8 Fie $x_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n+\frac{k}{n}}, n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $1-\ln 2$ d) 1 e) 2 f) ∞

AM 9 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k\,(k+2)}{n^3+k^2}$.

a) 2 b) 1 c) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{3}{2}$ e) $\dfrac{1}{3}$ f) ∞

AM 10 Fie $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{k}j^2\right), n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{n^4}.$$

a) 1 b) e c) e^3 d) e^4 e) e^{12} f) ∞

AM 11 Să se calculeze limita şirului cu termenul general $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{3^k \cdot k!}$.

a) 0 b) 1 c) 3 d) $\ln 3$ e) 2 f) ∞

AM 12 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{25k^2 - 15k - 4}$.

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{25}$ c) 0 d) 5 e) $\frac{4}{25}$ f) 15

AM 13 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{6k+1}{4^k}$.

a) ∞ b) 7 c) 6 d) $\frac{3}{2}$ e) 0 f) 3

AM 14 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^1 + 2(n-1)C_n^2 + 3(n-1)^2 C_n^3 + \cdots + n(n-1)^{n-1} C_n^n}{1 + nC_n^1 + n^2 C_n^2 + \cdots + n^n C_n^n}.$$

a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) e e) $e+1$ f) ∞

AM 15 Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$x_n = \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n}},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) 0 b) 1 c) $\frac{3}{4}$ d) $\ln 3$ e) $\frac{1}{2}$ f) ∞

AM 16 Să se studieze existenţa limitelor

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi n + (-1)^{n+1}}{4n}\right) \quad \text{şi } L_2 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi n^2 + (-1)^n}{4n^2}\right)$$

şi, dacă acestea există, să se precizeze valoarea lor.

a) $L_1 = L_2 = 1$ b) $L_1 = \dfrac{1}{4}$ şi L_2 nu există

c) $L_1 = \dfrac{1}{4}, L_2 = 1$ d) L_1 nu există şi $L_2 = 1$

e) $L_1 = L_2 = \dfrac{1}{4}$ f) L_1 şi L_2 nu există

AM 17 Fie şirul (x_n) definit prin $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$.

a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 3 f) ∞

AM 18 Fie şirul (x_n) definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$, $n \geq 1$. Atunci:

a) şirul este crescător şi mărginit
b) şirul este crescător şi are limita ∞
c) şirul este crescător şi are limita $\sqrt{2}$
d) şirul este descrescător şi nemărginit
e) şirul este descrescător şi are limita $\sqrt{2}$
f) şirul este mărginit şi nemonoton

AM 19 Fie şirul (x_n) definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$, $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

a) 0 b) $\dfrac{1}{e}$ c) 1 d) e e) $e + 1$ f) ∞

AM 20 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10}-1}{x-1}$.

a) 10 b) -9 c) 1 d) -1 e) 11 f) 9

AM 21 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^x-2^x}{2^x-4}$.

a) -1 b) 1 c) $\ln 2$ d) $\dfrac{1}{\ln 2}$ e) $\ln\sqrt{2}$ f) e

AM 22 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(e^{12x}+1\right)}{\ln\left(1+e^{3x}\right)}$.

a) 4 b) 3 c) 12 d) e^3 e) ∞ f) 1

AM 23 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{\operatorname{tg} x}}{2-\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{1}{4}$ d) 1 e) $\dfrac{1}{8}$ f) $-\dfrac{1}{2}$

AM 24 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+\pi}{x-\pi}\right)^x$.

a) $e^{2\pi}$ b) e^2 c) e^{π} d) π^2 e) π f) e

AM 25 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)-\cos x+e^{x^2}}{10x^2}$.

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{5}{2}$ f) $\dfrac{5}{4}$

AM 26 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x}$$

şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 0 b) nu există c) 1 d) ∞ e) -1 f) $-\infty$

AM 27 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \dfrac{1}{x}}{e^x - 1}$$

şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 0 b) nu există c) 1 d) ∞ e) -1 f) $-\infty$

AM 28 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) $-\infty$ b) 0 c) ∞ d) -1 e) 1 f) nu există

AM 29 Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 0} (\sqrt{\pi})^{\frac{1}{x}}$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 1 b) ∞ c) π d) $\sqrt{\pi}$ e) 0 f) nu există

AM 30 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} x^4 \left(e^{\frac{1}{x^2+1}} - e^{\frac{1}{x^2}} \right)$$

şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) -1 d) 2 e) nu există f) $2e$

AM 31 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[\frac{x}{4}\right]}{x}$$

şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) nu există f) 2

AM 32 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x\ln(e^x+1))$$

şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) ∞ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) -1 f) nu există

AM 33 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^2+2}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\right)$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) e e) 3 f) ∞

AM 34 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{x^3}{6} - \sin x\right)$$

şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) -1 b) $-\frac{1}{6}$ c) 0 d) nu există e) ∞ f) $-\infty$

AM 35 Să se determine valoarea parametrului real a pentru care

$$\lim_{x\to\infty}(\ln(e^x+a)-x)(e^x+x) = 1.$$

a) e^{-1} b) 0 c) 1 d) e e) -1 f) $-e$

AM 36 Să se determine mulţimea valorilor parametrului $a \in [0, \infty)$ pentru care limita

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sin x}}{x^a}$$

există şi este un număr real nenul.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{3\}$ d) $(2, \infty)$ e) $(0, 2)$ f) $\{0, 3\}$

AM 37 Să se calculeze

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} \right)^x .$$

a) e b) e^3 c) e^{-2} d) e^2 e) 1 f) ∞

AM 38 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(e^x) \right)^{\frac{1}{x}} .$$

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{1}{e}$ d) e e) e^2 f) $\dfrac{1}{e^2}$

AM 39 Fie funcţia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(2 - \{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a lui x. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) nu există d) -1 e) 2 f) $\dfrac{3}{2}$

AM 40 Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\operatorname{tg} x}$.

a) 0 b) 1 c) -1 d) ∞ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

AM 41 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}.$$

a) 0 b) 1 c) $n(n+1)$

d) $\frac{n(n+1)}{2}$ e) $n+1$ f) n

AM 42 Să se determine parametrul $a \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32.$$

a) 0 b) 2 c) 4 d) 1 e) 16 f) 8

AM 43 Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x \to 0} \frac{9^x - 1}{|x|}$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\ln 9$ e) $-\ln 9$ f) nu există

AM 44 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{n - (\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x)}{\sin^2 x}.$$

.

a) 0 b) 1 c) $\frac{n(n+1)}{2}$ d) ∞ e) $\frac{n}{2}$ f) $\frac{n(n+1)}{4}$

AM 45 Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} (26 - 5x)^{\frac{1}{x-5}}$.

a) 1 b) e^{-5} c) 0 d) e e) e^5 f) e^{-1}

AM 46 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[\frac{1}{\ln x}\right],$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, iar în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) $-\infty$ d) -1 e) ∞ f) nu există

AM 47 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to 0} \left\{\frac{1}{\ln|x|}\right\},$$

unde $\{t\}$ este partea fracţionară a lui t, iar în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) 1 e) $\frac{1}{e}$ f) $\frac{2}{e}$

AM 48 Să se calculeze $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\mathrm{tg}^2 x}$.

a) ∞ b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) 0 e) e f) -1

AM 49 Fie $a \in (0,\infty)$. Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}\,a}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ f) $\frac{1}{2a}$

AM 50 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^n) - \ln^n(1+x)}{x^{n+1}}.$$

a) n b) 0 c) 1 d) $\frac{n}{2}$ e) $\frac{n(n+1)}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

AM 51 Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{12} - \sin^{12}(x)}{x^{14}}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 6 e) 12 f) 24

AM 52 Fie $n \in \mathbb{N}, n > 1$, şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Se consideră funcţia

$$h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, h(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 0 b) ∞ c) 1 d) nu există e) $a_1 a_2 \cdots a_n$ f) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

AM 53 Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left| 2x^2 + x \right|, g(x) = \frac{1}{2x - 1} + \frac{1}{x + 1}.$$

Să se calculeze media geometrică a următoarelor trei limite:

$$\ell_1 = \lim_{x \to -\infty} f(x)^{g(x)}, \ell_2 = \lim_{x \to -1} f(x)^{g(x)}, \ell_3 = \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)^{g(x)}.$$

a) $\frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ c) $\sqrt[3]{e}$ d) e e) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ f) $\sqrt{e}$

AM 54 Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty} 2x\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right].$$

a) $-\frac{e}{2}$ b) $-e$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) e f) $\frac{e}{2}$

AM 55 Fie m un parametru real şi

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt[3]{mx^2-1}}{\sqrt{1-\cos\left(x^2\right)}}.$$

Să se arate că valoarea expresiei $E=3L-m\sqrt{2}$ este independentă de m şi să se precizeze valoarea lui E.

a) $E=-\sqrt{2}$ b) $E=2$ c) $E=3\sqrt{2}$
d) $E=3$ e) $E=2\sqrt{2}$ f) $E=-2\sqrt{2}$

AM 56 Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x.$$

a) $y=0$ b) $y=\frac{1}{2}$ c) $y=2x-\frac{1}{2}$
d) $y=-2x-\frac{1}{2}$ e) $y=-2x+\frac{1}{2}$ f) $y=2x+\frac{1}{2}$

AM 57 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x$. Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei f şi, în cazul în care acestea există, să se determine ecuaţiile lor.

a) $y=\frac{\pi}{2}x-1$ b) $y=-\frac{\pi}{2}x+1$ c) $y=\pm\frac{\pi}{2}x+1$
d) $y=\pm\frac{\pi}{2}x-1$ e) nu există f) $y=\frac{\pi}{2}x$

AM 58 Să se studieze existenţa asimptotei spre ∞ la graficul funcţiei

$$f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt{x^2+x\ln(e^x+1)}$$

şi, în cazul în care aceasta există, să se determine ecuaţia sa.

a) $y=x+\dfrac{1}{2}$ b) $y=\sqrt{2}x$ c) $y=x+1$

d) $y=\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ e) nu există f) $y=\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

AM 59 Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=x\ln x$$

şi, în cazul în care acestea există, să se determine ecuaţiile lor.

a) $y=x$ b) $y=x+1$ c) $y=0$

d) nu există asimptote e) $x=0$ f) $x=0$ şi $y=0$

AM 60 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin x$. Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei f şi, în cazul în care acestea există, să se determine ecuaţiile lor.

a) $y=0$ b) $y=x$ c) nu există

d) $y=x+1$ e) $x=0$ f) $y=2x$

AM 61 Fie $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}$. Să se determine ecuaţia asimptotei spre ∞ la graficul funcţiei f.

a) $y=0$ b) $y=1$ c) $y=2$ d) $y=x$ e) $y=2x$

f) Toate răpunsurile precedente sunt greşite

AM 62 Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{x+1}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea valorilor parametrului a astfel încât $y = 0$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

a) $(0, \infty)$ b) $\{1\}$ c) $(-1, 2)$

d) $\varnothing$ e) $[0, \infty)$ f) $\mathbb{R}$

AM 63 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine valorile parametrilor reali a, b astfel încât $y = x + 2$ să fie asimptotă oblică spre ∞ la graficul funcţiei f.

a) $a = 0$, $b = -2$ b) $a = 1$, $b = 0$ c) $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$

d) $a = 0$, $b = 3$ e) $a = -2$, $b \in \mathbb{R}$ f) $a = 0$, $b = 0$

AM 64 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$. Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

a) $x = 0$ este asimptotă verticală

b) $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$

c) $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$

d) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$

e) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$

f) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

AM 65 Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & \text{dacă } x\le 0\\ 1+\sqrt{x}, & \text{dacă } x>0.\end{cases}$$

a) $y=0$ b) $y=x-1$ c) $y=-\dfrac{\pi}{2}$

d) $y=-\dfrac{\pi}{2}x$ e) $y=-\dfrac{\pi}{4}$ f) $y=2\pi x$

AM 66 Să se determine asimptotele la graficul funcţiei

$$f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=e^{\frac{1}{x}}.$$

a) $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
$x=0$ este asimptotă verticală la dreapta

b) $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
$x=0$ este asimptotă verticală la dreapta

c) $y=1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
$x=0$ este asimptotă verticală la stânga

d) $y=1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
$x=0$ este asimptotă verticală la dreapta

e) $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
$x=0$ este asimptotă verticală la stânga

f) $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
$x=0$ este asimptotă verticală la stânga

AM 67 Să se determine asimptotele la graficul funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x^2+2}.$$

a) $y=2x,\quad y=-2x$ b) $y=1+x,\ \ y=-x$ c) $y=1-x,\ \ y=x$

d) $y=x,\ \ y=-x$ e) $y=1-x,\ \ y=1+x$ f) $y=2x,\ \ y=1-x$

AM 68 Fie $a \in (0, \infty)$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - a},$$

unde $D \subset \mathbb{R}$ reprezintă domeniul maxim de definiţie. Ştiind că funcţia f nu are asimptote verticale, să se studieze existenţa altor asimptote la graficul funcţiei f şi, în cazul în care acestea există, să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = 0$, $y = -x$ b) $y = 0$ c) $y = 0$, $y = x$

d) $y = 0$, $y = x + 1$ e) $y = 1$, $y = x$ f) nu are asimptote

AM 69 Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2^x - x^2}{x - 2}$, unde prin D s-a notat domeniul maxim de definiţie. Să se determine ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

a) $x + y + 2 = 0$ b) $y = x - 2$ c) $x = 2$

d) $y = 2 - x$ e) $x = 2$, $y = -x - 2$ f) $y = \pm x + 2$

AM 70 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|1 - x^2|}$. Câte dintre următoarele propoziţii sunt adevărate?

P_1: f nu admite asimptotă orizontală spre $-\infty$.

P_2: f admite asimptotă oblică spre $-\infty$.

P_3: Axa Ox este una dintre asimptotele funcţiei f.

P_4: f admite cel puţin o asimptotă verticală, printre care dreapta de ecuaţie $x = 1$.

P_5: f admite cel mult o asimptotă orizontală.

P_6: f admite exact o asimptotă oblică, care este o dreaptă ce trece prin origine.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 71 Fie $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât dreapta de ecuaţie $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcţiei f. Câte dintre următoarele propoziţii sunt adevărate?

P_1: Dreapta de ecuaţie $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

P_2: Dreapta de ecuaţie $y = -2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

P_3: Nu se pune problema existenţei asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

P_4: Dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

P_5: Dreapta de ecuaţie $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcţiei f.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 72 Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}\left[\dfrac{2}{x}\right], & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui a pentru care funcţia f este continuă în punctul $x = 0$.

a) 0 b) $-\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) 1 e) 2 f) $\dfrac{1}{3}$

AM 73 Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [0, 1] \\ \dfrac{a \sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & x \in (1, \pi]. \end{cases}$$

Să se determine a astfel încât funcţia f să fie continuă pe $[0, \pi]$.

a) $2e^3$ b) $-3e^2$ c) e d) $3e^3$ e) $-3e^3$ f) 0

AM 74 Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Să se precizeze care dintre răspunsurile de mai jos este corect.

a) f este continuă pe $[0,1]$

b) f este discontinuă în punctul $x = 0$

c) f este discontinuă în punctul $x = \dfrac{1}{2}$

d) f are limită nenulă în punctul $x = 0$

e) f este discontinuă în punctul $x = 1$

f) f nu admite limită în punctul $x = 0$

AM 75 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcţiei

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus \{\pi\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}} \right|$$

în punctul π. În caz afirmativ, să se precizeze şi expresia funcţiei prelungite $\widetilde{f}$.

a) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

b) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ 1, & x = \pi \end{cases}$

c) f nu este prelungibilă prin continuitate în $x = \pi$

d) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

e) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq\pi \\ \frac{1}{2}, & x=\pi \end{cases}$

f) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$

AM 76 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcţiei

$$f:(-1,1)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{\sin(3\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

în punctele $a=-1$ şi $b=1$. În caz afirmativ, să se precizeze şi expresia funcţiei prelungite $\widetilde{f}$.

a) f nu este prelungibilă prin continuitate la $[-1,1]$

b) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases} 3, & x=-1 \\ f(x), & x\in(-1,1) \\ -3, & x=1 \end{cases}$

c) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-1,1) \\ -3, & x\in\{-1,1\} \end{cases}$

d) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-1,1) \\ 3\pi, & x\in\{-1,1\} \end{cases}$

e) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases} -3, & x=-1 \\ f(x), & x\in(-1,1) \\ 3, & x=1 \end{cases}$

f) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-1,1) \\ 3, & x\in\{-1,1\} \end{cases}$

AM 77 Fie funcţia continuă $f:[1,100)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+\{x\})(b-\{x\})$, $a,b\in\mathbb{R}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x. Dacă $\mathrm{Im}f=[m,M]$, să se determine $M-m$.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) a^2+a d) ab e) $\frac{a^2+b^2}{2}$ f) $\frac{(a+b)^2}{4}$

AM 78 Se consideră funcţiile $f, g : (0, e) \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0,1) \\ x+1, & \text{dacă } x \in [1,e) \end{cases}, \text{ respectiv } g(x) = \frac{f(\ln(x+1))}{\ln(1+f(x))}.$$

Notăm

$$A = \{x \in (0,e) : \ g \text{ este discontinuă în } x\}.$$

Să se calculeze $S = \sum_{a \in A} a$.

a) 1 b) $1+e$ c) $1-e$ d) $e-1$ e) 0 f) e

AM 79 Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2-4x| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f. Să se determine mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei f.

a) $[1,4)$ b) $[1,4]$ c) $(0,\infty)$ d) $[1,\infty)$ e) $(1,\infty)$ f) $[1,\infty)\setminus\{4\}$

AM 80 Se consideră funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{|x|}{1+|x|}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se determine mulţimea C a punctelor de continuitate ale lui f, respectiv mulţimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale lui f.

a) $C = D_1 = (0,\infty)$ b) $C = [0,\infty)$, $D_1 = (0,\infty)$

c) $C = D_1 = \mathbb{R}$ d) $C = D_1 = \mathbb{R}^*$

e) $C = \mathbb{R}$, $D_1 = \mathbb{R}^*$ f) $C = [-1,1]$, $D_1 = (-1,1)$

AM 81 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln x, & \text{dacă } x > 1 \\ x^2, & \text{dacă } x \leq 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?

a) f este continuă şi derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

b) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

c) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $2f(1) = f'(1)$

d) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = f'(1)$

e) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = 2f'(1)$

f) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = -f'(1)$

AM 82 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}.$$

Să se studieze derivabilitatea funcţiei în punctul $x_0 = 1$ şi, în caz afirmativ, să se calculeze $f'(1)$.

a) f este derivabilă şi $f'(1) = \frac{1}{e}$
b) f este derivabilă şi $f'(1) = -\frac{1}{e}$

c) f este derivabilă şi $f'(1) = 0$
d) f nu este derivabilă în $x_0 = 1$

e) f este derivabilă şi $f'(1) = e$
f) f este derivabilă şi $f'(1) = -e$

AM 83 Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ, să se determine $f'(0)$.

a) f este derivabilă şi $f'(0) = -1$
b) f este derivabilă şi $f'(0) = 1$

c) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$
d) f este derivabilă şi $f'(0) = 0$

e) f este derivabilă şi $f'(0) = 2$
f) f este derivabilă şi $f'(0) = \frac{1}{2}$

AM 84 Să se determine parametrii reali a, b astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

a) $a = 4, \quad b = 0$ b) $a = 3, \quad b = 0$ c) $a = 0, \quad b = 0$

d) $a = 0, \quad b = 4$ e) $a = 4, \quad b = 1$ f) $a = -1, \quad b = 4$

AM 85 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x(a \sin x + b \cos x), & \text{dacă } x < 0 \\ x\sqrt{x^2 + 1}, & \text{dacă } x \geq 0\ . \end{cases}$$

Determinaţi parametrii reali a, b astfel încât funcţia f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

a) $a = 1,\ b \in \mathbb{R}$ b) $a = b = 0$ c) $a \in \mathbb{R},\ b = 0$

d) $a = 1, b = 0$ e) $a = b = 1$ f) $a = 0, b = 1$

AM 86 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Să se determine mulţimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale funcţiei f.

a) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (1, 2)$ b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ c) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

d) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ f) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (-2, -1)$

AM 87 Să se precizeze numărul punctelor unghiulare ale graficului funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 88 Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\ .$$

Determinaţi domeniul maxim de definiţie D şi domeniul de derivabilitate D_1.

a) $D = D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

b) $D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$
$D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

c) $D = D_1 = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

d) $D = \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$
$D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

f) $D = D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

AM 89 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{x^4, x^5, x^6, x^7\}$. Notăm

$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ f \text{ nu este derivabilă în } x\}.$$

Să se calculeze $S = \sum\limits_{x \in A} x^2$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 4 f) 5

AM 90 Să se calculeze derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = (x^2+1)^{x^2+1}$.

a) $2x(x^2+1)^{x^2+1}[\ln(x^2+1)+1]$

b) $2x(x^2+1)^{x^2+1}\ln(x^2+1)$

c) $x(x^2+1)^{x^2+1}[\ln(x^2+1)+1]$

d) $2x[\ln(x^2+1)+1]$

e) $2x(x^2+1)[\ln(x^2+1)+1]$

f) $x(x^2+1)^{x^2+1}\ln(x^2+1)$

AM 91 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1-x^2) + \sqrt{x^2+1}$. Să se calculeze derivata funcţiei f în $x_0 = 1$.

a) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-4}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) $-2+\sqrt{2}$

AM 92 Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2x^2}}\ , & x \neq 0 \\ a\ , & x = 0 \end{cases}$$

este continuă. În cazul în care există, să se calculeze $f'(0)$.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) nu există

AM 93 Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este exprimată prin relaţia $s(t) = e^{-t}\cos t$ (timpul este măsurat în secunde). Să se determine acceleraţia mobilului după 2 secunde.

a) $e^{-2}\cos 2$ b) $2e^{-2}\cos 2$ c) $2e^{-2}\sin 2$

d) $e^{-2}\sin 2$ e) $\dfrac{e^{-2}\sin 2}{2}$ f) $\dfrac{e^{-2}\cos 2}{2}$

AM 94 Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Să se studieze dacă f este inversabilă şi, în caz afirmativ, să se calculeze limita

$$L = \lim_{y\to-\infty} e^{-y} f^{-1}(y).$$

a) f este inversabilă şi $L = \infty$ b) f este inversabilă şi $L = 0$

c) f este inversabilă şi $L = 1$ d) f este inversabilă şi $L = e$

e) f este inversabilă şi $L = e^{-1}$ f) f nu este inversabilă

AM 95 Se consideră funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $f_0(x) = \dfrac{x}{e^x}$ şi $f_n(x) = f'_{n-1}(x), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $f_2(x)$.

a) 0 b) xe^{-x} c) xe^{-2x}

d) $(x-1)e^x$ e) $(2x-3)e^{-x}$ f) $(x-2)e^{-x}$

AM 96 Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2|\ln x|}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $g : (0,1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^2 f''(x) + mxf'(x)}{f(x)}$$

să fie constantă.

a) 2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 0 d) 4 e) 1 f) -1

AM 97 Se consideră funcţia $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. Să se calculeze $f'(x)$.

a) $f'(x) = \dfrac{x}{2}$ b) $f'(x) = \dfrac{1}{x+\pi}$ c) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+\pi}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e) $f'(x) = \dfrac{1}{2}$ f) $f'(x) = 1$

AM 98 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \left|x^2 + |x^2 - x| - 1\right|.$$

Notăm cu M mulţimea punctelor în care f nu este derivabilă şi $S = \sum\limits_{x \in M} f'_s(x)$, unde $f'_s(x)$ reprezintă derivata la stânga a funcţiei f în punctul x. Să se determine S.

a) -3 b) 0 c) 1 d) -1 e) 3 f) $\dfrac{1}{2}$

AM 99 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietăţile:

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = 5xy,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \text{ şi } \ \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 2.$$

Să se determine $f(0)$ şi $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) $f(0) = 1,\ f'(x) = 5x$ b) $f(0) = 0,\ f'(x) = 5x$

c) $f(0) = 2,\ f'(x) = 2x + 5$ d) $f(0) = 1,\ f'(x) = 5x + 2$

e) $f(0) = 0,\ f'(x) = 5x + 2$ f) $f(0) = 0,\ f'(x) = 2x + 2$

AM 100 Fie $a \in (0, \infty)$ şi funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x + a) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Să se determine mulţimea valorilor lui a astfel încât funcţia f să fie convexă.

a) $(0, \infty)$ b) $[1, \infty)$ c) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ d) $\varnothing$ e) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ f) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

AM 101 Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

În cazul în care există, să se determine $f'(1)$.

a) $-\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) 2 e) nu există f) 3

AM 102 Fie funcţia inversabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + x - 1$. În cazul în care există, să se determine $(f^{-1})'(e)$.

a) $\frac{1}{e+1}$ b) 0 c) $\frac{1}{e}$ d) nu există e) $\frac{1}{e^e + 1}$ f) $e^e + 1$

AM 103 Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2012-2013\sqrt[2013]{x}$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$.

a) $y=x-1$ b) $y=x+1$ c) $y=x$

d) $y=0$ e) $y=1$ f) $y=2$

AM 104 Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+5x$, în punctul de pe grafic în care panta tangentei este minimă.

a) $y=-\dfrac{5}{2}\,x+\dfrac{11}{2}$ b) $y=\dfrac{5}{2}\,x+\dfrac{11}{2}$ c) $y=3$

d) $y=x+2$ e) $y=2x+1$ f) $y=-2x+1$

AM 105 Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sin(x^3-1)-\frac{4}{x},$$

în punctul de abscisă $x=1$.

a) $y=7x-11$ b) $y=7x$ c) $y=11x-7$

d) $7y=x-11$ e) $7y=x+11$ f) $y=7x-4$

AM 106 Pentru ce valoare a parametrului real a dreapta $y=ax-2$ este tangentă la curba $y=x^3+4x$?

a) 1 b) -1 c) 7 d) 2 e) -2 f) 0

AM 107 Se consideră funcţia $f:[-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$. Să se determine abscisa punctului situat pe graficul lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care uneşte punctele de pe grafic de abscise $x=0$ şi $x=3$.

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $-\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{5}{4}$ e) $\dfrac{3}{4}$ f) $\dfrac{4}{3}$

AM 108 Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\sqrt{x}$. Să se determine coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{1}{2}$.

a) $(1,1)$ b) $(0,1)$ c) $(1,0)$

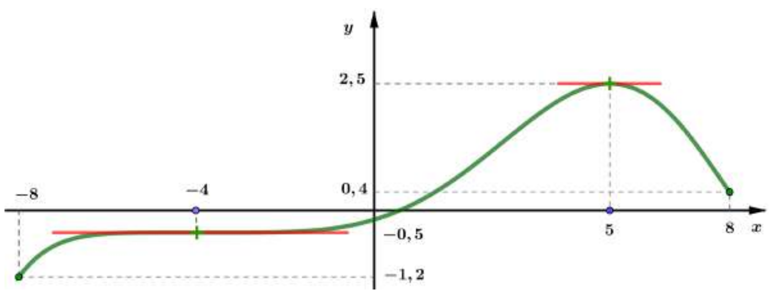
d) $(2,0)$ e) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2},\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

AM 109 Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}\ln x$. Să se determine punctul de pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.

a) $A(1,0)$ b) $A(e,\sqrt{e})$ c) $A(e^{-2},-2)$

d) $A(e^{-2},-2e^{-1})$ e) $A(1,-2e^{-1})$ f) $A(e^2,2e)$

AM 110 Graficul derivatei unei funcţii f, derivabilă pe $[-8,8]$, este dat în figura următoare:



Să se determine mulţimea valorilor lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcţiei f are exact două tangente paralele cu dreapta $y=mx$.

a) $\varnothing$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left(-\infty,-\frac{6}{5}\right)$

d) $\left[\frac{5}{2},\infty,\right)$ e) $\left[\frac{2}{5},\frac{5}{2}\right)$ f) $[-8,8]$

AM 111 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Să se determine mulţimea punctelor de inflexiune ale lui f.

a) $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ c) $\varnothing$

d) $\{-1\}$ e) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ f) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

AM 112 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei f.

a) 1 b) 2 c) 0 d) 3 e) 4 f) 5

AM 113 Fie $a \in (0, \infty)$ şi $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 - \ln x$. Să se stabilească numărul punctelor de inflexiune ale lui f.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) depinde de valoarea lui a

AM 114 Graficul derivatei unei funcţii $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ este afişat mai jos. Care dintre propoziţiile următoare sunt adevărate?

$P_1 : f$ este strict crescătoare pe $(0, 3)$;

$P_2 : f$ este strict descrescătoare pe $(3, 6)$;

$P_3 : f$ strict crescătoare pe $(1, 5)$;

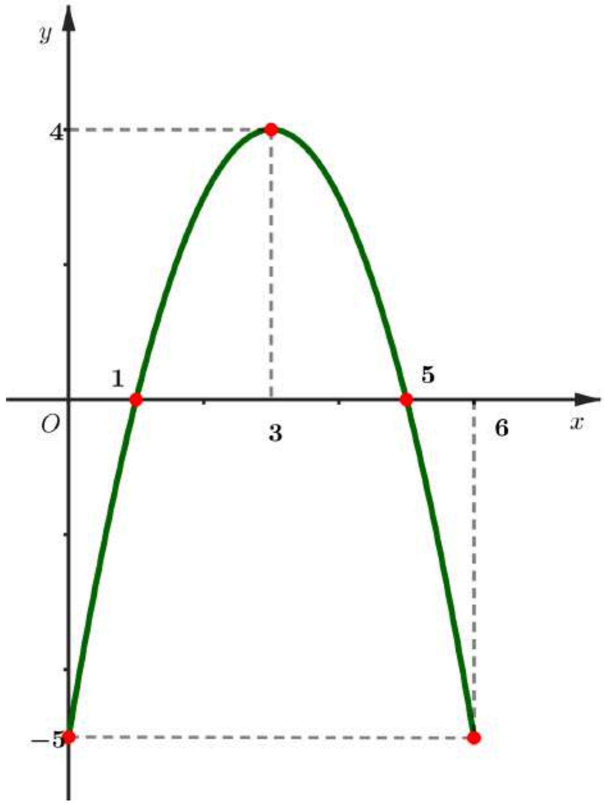
$P_4 : f$ strict descrescătoare pe $(0, 1)$, respectiv $(5, 6)$;

$P_5 : f$ strict crescătoare pe $(0, 1)$;

$P_6 : f$ strict descrescătoare pe $(3, 5)$.

a) P_2 şi P_5 b) P_1 şi P_2 c) P_3 şi P_5

d) P_3 şi P_4 e) P_2 şi P_6 f) P_1 şi P_6



AM 115 Graficul derivatei unei funcţii $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ este dat la problema **AM 114**. Care dintre propoziţiile de mai jos sunt adevărate?

$P_1 : x = 1$ este punct de minim al funcţiei f;

$P_2 : x = 5$ este punct de maxim al funcţiei f;

$P_3 : x = 1$ este punct de maxim al funcţiei f;

$P_4 : x = 5$ este punct de minim al funcţiei f;

P_5 : funcţia f nu are puncte de extrem;

$P_6 : x = 3$ este punct de maxim al funcţiei f.

a) P_1 şi P_2 b) P_3 c) P_4

d) P_5 e) P_6 f) P_3 şi P_4

AM 116 Fie funcţia $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$, de două ori derivabilă, al cărei grafic este dat la problema **AM 114**. Care dintre propoziţiile de mai jos sunt adevărate?

P_1 : f este convexă pe $(0, 3)$;

P_2 : f este concavă pe $(3, 6)$;

P_3 : f este convexă pe $(3, 6)$;

P_4 : f este concavă pe $(0, 3)$;

P_5 : f este convexă pe $(0, 6)$;

P_6 : f este concavă pe $(0, 6)$.

a) P_1 şi P_2 b) P_3 c) P_4

d) P_5 e) P_6 f) P_3 şi P_4

AM 117 Fie funcţia $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$, de două ori derivabilă, al cărei grafic este dat la problema **AM 114**. Care dintre propoziţiile de mai jos sunt adevărate?

P_1 : f nu are puncte de inflexiune;

P_2 : $x = 1$, $x = 5$ sunt puncte de inflexiune ale funcţiei f;

P_3 : $x = 3$ este punct de inflexiune al funcţiei f;

P_4 : $x = 1$ este punct de inflexiune al funcţiei f;

P_5 : $x = 5$ este punct de inflexiune al funcţiei f;

P_6 : $x = 0$, $x = 6$ sunt puncte de inflexiune ale funcţiei f.

a) P_1 b) P_2 c) P_3 d) P_4 e) P_5 f) P_6

AM 118 Funcţia $f : D_{\max} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{ab}{a + (b - a)\, e^{-rt}}$, cu parametrii a, b şi r pozitivi, numită funcţia logistică, modelează evoluţia numărului de indivizi ai unei specii. Să se precizeze care dintre următoarele propoziţii este adevărată:

a) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare, mărginită şi îşi atinge marginile;

b) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare şi nemărginită pe $D_{\max}$;

c) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare, mărginită şi îşi atinge marginile;

d) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare, mărginită, dar nu îşi atinge marginile;

e) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare, mărginită, dar nu îşi atinge marginile;

f) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare şi nemărginită pe $D_{\max}$.

AM 119 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{-1\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1, 2\}$ f) $\varnothing$

AM 120 Fie $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcţiei f, precizând şi natura acestora.

a) $(e, 2e)$, minim local

b) $\left(e, \dfrac{1}{2e}\right)$, maxim local

c) $\left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2e}\right)$, maxim local

d) $(\sqrt{e}, 2e)$, minim local

e) $\left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2e}\right)$, minim local

f) $\left(\dfrac{1}{e}, 2e\right)$, minim local

AM 121 Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.

a) $\{0, 6\}$ b) $\{3\}$ c) $\varnothing$ d) $\{0\}$ e) $\{6\}$ f) $\{1, 6\}$

AM 122 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât $x_0 = 1$ să fie punct de extrem local al funcţiei f.

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1 e) 3 f) -3

AM 123 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$ f) $\varnothing$

AM 124 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$

d) $\{0, 1\}$ e) $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ f) $\varnothing$

AM 125 Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7)\,.$$

a) $\{2, 4 \pm \sqrt{5}\}$ b) $\{4, 2 \pm \sqrt{5}\}$ c) $\{2\}$

d) $\{4\}$ e) $\{4, 4 \pm \sqrt{5}\}$ f) $\{2, 2 \pm \sqrt{5}\}$

AM 126 Funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \ln x$ are:

a) un punct de minim local

b) un punct de maxim local

c) două puncte de maxim local

d) două puncte de minim local

e) un punct de minim local şi un punct de maxim local

f) nu are puncte de extrem local

AM 127 Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{|x^3 - 3x^2|} .$$

a) $\{0, 3\}$ b) $\varnothing$ c) $\{2\}$

d) $\{0, 1, 3\}$ e) $\{0, 2, 3\}$ f) $\{-1, 3\}$

AM 128 Se consideră punctele $A(-1, 0)$ şi $B(3, 0)$. Dacă C este un punct variabil pe graficul funcţiei $f : (0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$, să se calculeze valoarea maximă pe care o poate lua aria triunghiului ABC.

a) 1 b) 2 c) $\dfrac{1}{e}$ d) $\dfrac{2}{e}$ e) $\dfrac{4}{e}$ f) $\dfrac{12}{e^3}$

AM 129 Fie $m \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1} .$$

Să se determine mulţimea valorilor parametrului m astfel ca funcţia f să aibă două puncte de extrem local.

a) $\{-1\}$ b) $(-1, 1)$ c) $(-\infty, -1)$

d) $(1, \infty)$ e) $(0, 1)$ f) $\mathbb{R}^*$

AM 130 Se consideră funcţia

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{2+x}\ .$$

Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcţiei f, precizând şi natura acestora.

a) $(-1, e)$, maxim local b) $\left(1, \frac{e}{3}\right)$, minim local

c) $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$, maxim local d) $\left(1, \frac{e}{3}\right)$, maxim local

e) $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$, minim local f) $(1, e)$, maxim local

AM 131 Să se determine valoarea minimă a funcţiei

$$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = 3\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x.$$

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{3}$ f) 0

AM 132 Să se determine punctul de minim al funcţiei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2+1)\sqrt{x} - 12\ \mathrm{arctg}\, \sqrt{x}.$$

a) 2 b) 1 c) 0 d) π e) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

AM 133 Fie $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $a \neq b$ şi funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x\, b^{1-x} + b^x\, a^{1-x}.$$

Atunci:

a) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei f

b) $\left(\frac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de minim local al graficului funcţiei f

c) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ nu este punct de extrem al graficului funcţiei f

d) $\left(\frac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei f

e) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de minim local al graficului funcţiei f

f) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei f

AM 134 Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{e^{|\ln x|}}{x+1} .$$

Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) 0 b) 2 c) 3 d) 1 e) 4 f) 5

AM 135 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|1-x^2|}$ şi mulţimile

$$E = \{x \in \mathbb{R} :\ x \text{ este punct de extrem local al lui } f\},$$

respectiv

$$I = \{x \in \mathbb{R} :\ (x, f(x)) \text{ este punct de întoarcere al graficului funcţiei } f\}.$$

Ştiind că $|A|$ notează numărul de elemente ale unei mulţimi finite A, să se calculeze $|E|^{|I|}$.

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 9 f) 6

AM 136 Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{|\ln|x-2||}}{x+1}$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiţie al lui f. Să se calculeze

$$S = \sum_{x \in E} f(x),$$

unde $E = \{x \mid x \in D,\ x \text{ este punct de extrem local al lui } f\}$.

a) $S = \dfrac{3}{4}$ b) $S = \dfrac{7}{4}$ c) $S = 3$ d) $S = \dfrac{5}{4}$ e) $S = \dfrac{3}{2}$ f) $S = 1$

AM 137 Fie g prelungita prin continuitate a funcţiei

$$f : (-9, 9) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{10 - |x+1|}{\sqrt{81 - x^2}}.$$

Să se determine toate punctele de extrem local ale funcţiei g, precizând şi natura acestora.

a) 8 este punct de maxim local, -1 şi $-\dfrac{81}{11}$ sunt puncte de minim local

b) -1 este punct de maxim local, 9 şi $-\dfrac{81}{11}$ sunt puncte de minim local

c) -1 este punct de maxim local, 8 şi $-\dfrac{81}{8}$ sunt puncte de minim local

d) -1 este punct de maxim local, $-\dfrac{81}{11}$ este punct de minim local

e) $-\dfrac{81}{11}$ este punct de minim local

f) -9 şi -1 sunt puncte de maxim local, $-\dfrac{81}{11}$ şi 9 sunt puncte de minim local

AM 138 Să se determine abscisa punctului din cadranul II corespunzător distanţiei maxime dintre graficul funcţiei $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln(x^2)$ şi axa Ox.

a) -1 b) $-e$ c) $-\dfrac{1}{e}$ d) $-\dfrac{1}{e^2}$ e) $-\dfrac{1}{2}$ f) -2

AM 139 Concentraţia unui medicament în fluxul sanguin la t ore după administrare este

$$C(t) = \frac{13,6t}{(9,6t+19,2)^2}.$$

În cât timp este atinsă concentraţia maximă $C_{\max}$ a medicamentului? Care este durata de timp pentru care concentraţia depăşeşte $\frac{8}{9}$ din $C_{\max}$?

a) $t_{\max} = 1$ ore şi $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru trei ore

b) $t_{\max} = 3$ ore şi $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru două ore

c) $t_{\max} = 2$ ore şi $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru două ore

d) $t_{\max} = 1$ ore şi $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru jumătate de oră

e) $t_{\max} = 2$ ore şi $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru trei ore

f) $t_{\max} = 3$ ore şi $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru jumătate de oră

AM 140 Să se determine abscisa punctului de pe graficul funcţiei

$$f:(-2,0)\to\mathbb{R}\,,\quad f(x)=\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+2x}\,,$$

situat cel mai aproape de prima bisectoare.

a) $-\sqrt{2}$ b) -1 c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 141 Fie A punctul aparţinând graficului funcţiei

$$f:\left[-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}\,,\quad f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\,,$$

situat cel mai aproape de originea O a sistemului de coordonate carteziene xOy. Să se afle distanţa de la O la A.

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{36}$ e) $\frac{\sqrt{21}}{18}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

AM 142 Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză constantă v km/h (cu condiţia $40 \leq v \leq 70$) consumând $\left(8+\frac{v^2}{300}\right)$ $litri/h$ de combustibil. Să se determine viteza pentru care costul este minim ştiind că şoferul este plătit cu 30 lei/h şi combustibilul costă 7,5 $lei/litru$.

a) 50 km/h b) 55 km/h c) 60 km/h
d) 65 km/h e) 70 km/h f) 45 km/h

AM 143 Să se determine dintre toate numerele reale pozitive pe cel pentru care diferenţa dintre acesta şi cubul său să fie maximă.

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ f) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

AM 144 Să se determine mulţimea soluţiilor inecuaţiei

$$x-\frac{x^3}{6}-\sin x \leq 0.$$

a) $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ b) $(-\infty,0]$ c) $[0,\infty)$
d) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{Z}$

AM 145 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$. Să se determine mulţimea soluţiilor inecuaţiei $f(x)-1>0$.

a) $(0,\infty)$ b) $(-\infty,0)$ c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ d) $(1,\infty)$ e) $(-\infty,-1)$ f) $\varnothing$

AM 146 Să se determine cel mai mare număr real a cu proprietatea

$$x^2+1 \geq a+2\ln x, \quad \text{pentru orice} \quad x \in (0,\infty).$$

a) 0 b) 2 c) 1 d) -1 e) 4 f) 3

AM 147 Să se determine mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x+e^x \geq mx+1, \quad \text{pentru orice} \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0,2\}$ e) $\{0,1\}$ f) $\varnothing$

AM 148 Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m astfel ca ecuaţia $e^x = mx^2$ să aibă trei soluţii reale şi distincte.

a) $(-\infty, 0]$ b) $\{1\}$ c) $\left(0, \dfrac{e^2}{8}\right)$

d) $\left(\dfrac{e^2}{8}, \dfrac{e^2}{4}\right)$ e) $\left(\dfrac{e^2}{4}, \infty\right)$ f) $\left\{\dfrac{e^2}{4}\right\}$

AM 149 Să se rezolve inecuaţia $e^{13x}+13e^{-x} \geq 14$.

a) $\varnothing$ b) $\{0\}$ c) $[0,\infty)$ d) $(-\infty,0]$ e) $\mathbb{R}$ f) $\{1\}$

AM 150 Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+3}\,, & \text{dacă } x \neq -3 \\ 0\,, & \text{dacă } x=-3\,. \end{cases}$$

Să se studieze monotonia funcţiei f.

a) f este crescătoare pe $\mathbb{R}$ b) f este crescătoare pe $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

c) f este crescătoare pe $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ d) f este descrescătoare pe $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

e) f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ f) f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$

AM 151 Se consideră funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Să se determine imaginea funcţiei f.

a) $[0, 1]$ b) $[0, \infty)$ c) $\mathbb{R}$

d) $[0, 10]$ e) $[1, 4]$ f) $\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right]$

AM 152 Fie $P(t) = t^3 e^{-\frac{t}{5}}$ puterea emisă la descărcarea unui aparat electric la fiecare moment $t > 0$ (puterea este măsurată în waţi şi timpul în secunde). Să se determine la ce moment puterea va fi maximă.

a) 3 b) 15 c) 5 d) 20 e) 15^2 f) 25

AM 153 Fie triunghiul echilateral ABC de latură a. Pe laturile BA şi BC se consideră punctele D, respectiv E, cu $BD = BE$. Se pliază triunghiul DBE de-a lungul lui DE, punctul B devenind B', astfel încât planul triunghiului $B'DE$ să fie perpendicular pe planul iniţial al triunghiului ABC. Să se determine volumul maxim al piramidei $B'ACED$.

a) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ b) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$ c) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$ d) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$ e) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ f) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

AM 154 Fie funcţia $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

şi propoziţiile:

(i) f este continuă, dar nu este derivabilă;

(ii) $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f;

(iii) $y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f;

(iv) $f'(0) = \dfrac{1}{2}$;

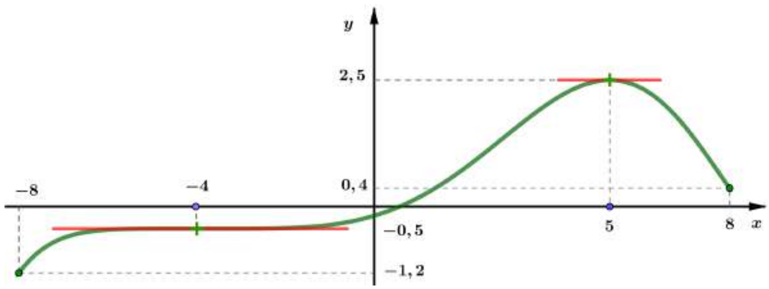
(v) f este strict crescătoare;

(vi) $\operatorname{Im} f = \left[-\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right]$.

Câte dintre propoziţiile date sunt adevărate?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2 f) 1

AM 155 Graficul derivatei unei funcţii f, de două ori derivabilă pe $[-8, 8]$, este dat în figura următoare:



Ştiind că acest grafic are exact 2 tangente orizontale, situate în punctele $(-4; f'(-4))$ şi $(5; 2{,}5)$, să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei f.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 156 Pentru motociclişti, într-un concurs de motociclete, este importantă aflarea punctelor impuse schimbărilor de viraj, de la dreapta la stânga şi de la stânga la dreapta, pentru ca parcursul să fie ideal. În ce punct de pe pistă un concurent trebuie să schimbe poziţia de viraj a motocicletei de la stânga la dreapta, pentru a avea un parcurs optim, dacă traseul este descris de funcţia $f : [-4, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -0{,}05 \cdot x^4 + 1{,}2 \cdot x^2 + 2$, iar punctul de start este $S(-4, f(-4))$?

a) $(0, 0)$ b) $(0, 2)$ c) $(-2, 6)$

d) $(2, 6)$ e) $\left(-2\sqrt{3}, \dfrac{46}{5}\right)$ f) $\left(2\sqrt{3}, \dfrac{46}{5}\right)$

AM 157 Fie şirul (x_n) definit prin $x_1 = \dfrac{1}{e-1}$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n), n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

a) 0 b) $\dfrac{1}{e}$ c) 1 d) e e) $e + 1$ f) ∞

AM 158 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ care satisface relaţia

$$2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) + f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = x$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$. Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{f^{(n)}\left(-1\right)}, n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $f^{(n)}\left(x_0\right)$ semnifică derivata de ordinul n a lui f în x_0.

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{3}{2}$ f) ∞

AM 159 Fie funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F\left(x\right) = \left(3x^2 - 6x\right)\sqrt[3]{x}$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

a) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = \left(6x - 6\right)\sqrt[3]{x}$

b) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = \left(x^3 - 3x^2\right)\sqrt[3]{x^2}$

c) F nu este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$

d) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = \left(7x - 8\right)\sqrt[3]{x}$

e) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = \left(7x - 8\right)\sqrt[3]{x^2}$

f) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = \left(x^3 - 3x^2\right)\sqrt[3]{x}$

AM 160 Fie funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F\left(x\right) = x\left|x - 1\right|$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

a) F este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right|$

b) F este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{2}\left|x-1\right|$

c) F este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|2x-1\right|$

d) F este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\left|\frac{x^2}{2}-x\right|$

e) F nu poate fi primitivă a niciunei funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

f) F este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x-1\right|+x$

AM 161 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x+e^{-x}, & x<0 \\ 1+xe^{x}, & x\geq 0\ . \end{cases}$$

a) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\begin{cases} (x^2-2)-e^{-x}, & x<0 \\ (x-1)(2e^{x}+1), & x\geq 0 \end{cases}+\mathcal{C}$

b) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\begin{cases} (x^2+1)-e^{-x}, & x<0 \\ (x-1)(1-e^{x}), & x\geq 0 \end{cases}+\mathcal{C}$

c) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\varnothing$ deoarece f nu este primitivabilă

d) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\begin{cases} (x^2+2)-e^{-x}, & x\leq 0 \\ x+e^{x}, & x>0 \end{cases}+\mathcal{C}$

e) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\begin{cases} x^2-1-e^{-x}, & x<0 \\ (x-1)(1+e^{x}), & x\geq 0 \end{cases}+\mathcal{C}$

f) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\begin{cases} (x^2-2)-e^{-x}, & x\leq 0 \\ (x-1)(e^{x}+2), & x>0 \end{cases}+\mathcal{C}$

AM 162 Să se determine valorile parametrilor reali a, b, c pentru care funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = ax + (bx^2 + c)\,\text{arctg}\,x$ este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\,\text{arctg}\,x$.

a) $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = c = \dfrac{1}{2}$ b) $a = b = \dfrac{1}{2}$, $c = -\dfrac{1}{2}$ c) $a = b = c = -\dfrac{1}{2}$

d) $a = b = c = \dfrac{1}{2}$ e) $a = c = \dfrac{1}{2}, b = -\dfrac{1}{2}$ f) $a = b = c = 1$

AM 163 Să se calculeze

$$\int \left(x^2 - x\right) e^{-2x} dx.$$

a) $(2x - 1)\, e^{-2x} + \mathcal{C}$ b) $\dfrac{x^2}{2} e^{-2x} + \mathcal{C}$ c) $\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}\right) e^{-2x} + \mathcal{C}$

d) $(1 - 2x)\, e^{-2x} + \mathcal{C}$ e) $-\dfrac{x^2}{2} e^{-2x} + \mathcal{C}$ f) $\left(-\dfrac{2x^3}{3} + x^2\right) e^{-2x} + \mathcal{C}$

AM 164 Să se calculeze

$$\int (2x - 1) \cos 2x dx.$$

a) $x \sin 2x + \dfrac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x \cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

c) $x \sin 2x + 2 (\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\dfrac{x}{2} \cos 2x + \dfrac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

e) $x \cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$ f) $\dfrac{x}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{2} (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

AM 165 Fie $I_n = \displaystyle\int \frac{e^x}{x^n}\, dx$, $x \in (0, +\infty)$, unde n este un număr natural nenul. Care dintre umătoarele relaţii este adevărată?

a) $I_3 = \dfrac{e^x}{2x^2} - \dfrac{1}{2} I_1$ b) $3I_3 = \dfrac{e^x}{x^2} - I_1$

c) $I_3 = -\dfrac{e^x}{2x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{2} I_1$ d) $2I_3 = \dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{2}{3} I_2$

e) $I_3 = \dfrac{e^x}{3x^2} - \dfrac{2}{3} I_2$ f) $I_3 = \dfrac{e^x}{3x^3} - \dfrac{e^x}{2x^2} + \dfrac{1}{3} I_2$

AM 166 Fie $I \subset (-\infty, 1)$ un interval şi funcţia $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f\,(x) = \frac{2x+1}{x^2 - 6x + 5}\ .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int f\,(x)\,dx$.

a) $\dfrac{11}{4}\ln(1-x) - \dfrac{3}{4}\ln(5-x) + \mathcal{C}$ b) $\dfrac{11}{4}\ln(5-x) - \dfrac{3}{4}\ln(1-x) + \mathcal{C}$

c) $\dfrac{11}{4}\ln\dfrac{x-5}{x-1} + \mathcal{C}$ d) $\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{1-x}{|x-5|} + \mathcal{C}$

e) $\dfrac{7}{4}\ln|x-1| - \dfrac{3}{4}\ln(5-x) + \mathcal{C}$ f) $\dfrac{11}{4}\ln(1-x) - \dfrac{7}{4}\ln|x-5| + \mathcal{C}$

AM 167 Să se determine familia primitivelor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax+b}{a^2x^2 + b^2}\ , \quad a \in (0, \infty), \;\; b \in \mathbb{R}^*.$$

a) $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2 + b^2) + \dfrac{1}{ab}\ \text{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

b) $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2 + b^2) + \dfrac{1}{a}\ \text{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2 + b^2) + \dfrac{a}{b}\ \text{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

d) $F(x) = \dfrac{b}{a}\ln(a^2x^2 + b^2) + \dfrac{b}{a}\ \text{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

e) $F(x) = \dfrac{1}{a}\ln(a^2x^2 + b^2) + \dfrac{1}{a}\ \text{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

f) $F(x) = \dfrac{b}{2a}\ln(a^2x^2 + b^2) + \dfrac{b}{a}\ \text{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

AM 168 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + (x-1)^2}.$$

Să se determine acea primitivă F a lui f pentru care $F(0) = \dfrac{\pi}{24}$.

a) $F(x) = \operatorname{arctg}(2x-1) + \dfrac{7\pi}{24}$ b) $F(x) = \operatorname{arctg}(2x-1) - \dfrac{5\pi}{24}$

c) $F(x) = \ln(2x-1) + \dfrac{5\pi}{24}$ d) $F(x) = \operatorname{arctg}(x-1) + \dfrac{7\pi}{12}$

e) $F(x) = \ln(x-1) + \dfrac{\pi}{4}$ f) $F(x) = \operatorname{arctg}(x^2+1) + \dfrac{5\pi}{24}$

AM 169 Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x - 8 - x^2}{x^4 + 4x^3}.$$

Să se determine acea primitivă F a funcţiei f care verifică relaţia $F(5) = \dfrac{4}{25}$.

a) $\ln\sqrt{\dfrac{x+4}{x}} - \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{8}{25} - \ln\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ b) $\ln\sqrt{\dfrac{x+4}{x^3}} - \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{6}{25} - \ln\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

c) $\ln\sqrt{\dfrac{x+4}{x}} - \dfrac{x^2}{x+1} + \dfrac{8}{5} - \ln\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ d) $\ln\sqrt{\dfrac{x+4}{x}} - \dfrac{x-1}{x^2} - \ln\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

e) $\ln\sqrt{\dfrac{x}{x+4}} + \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{6}{25} - \ln\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$ f) $\ln\sqrt{\dfrac{x}{\sqrt{x+4}}} - \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{1}{25} - \ln\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

AM 170 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{x^{2018} + x}$ pe un interval $I \subset (0, \infty)$.

a) $\ln x - \dfrac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$ b) $\ln x + \dfrac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$

c) $\ln x + \ln(1 + x^{2017}) \cdot 2017 + \mathcal{C}$ d) $\ln x - \dfrac{\ln(x + x^{2018})}{2018} + \mathcal{C}$

e) $-\ln x + \dfrac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$ f) $\dfrac{\ln x}{2018} - \dfrac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$

AM 171 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f\left(x\right)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+10}}\ .$$

a) $\dfrac{2}{7}\sqrt{x^2-6x+10}+\ln\left|x-3-\sqrt{x^2-6x+10}\right|+\mathcal{C}$

b) $\dfrac{2}{7}\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-6x+10}+\mathcal{C}$

c) $\dfrac{2\left(x-3\right)}{7}\ln\sqrt{x^2-6x+10}+\mathcal{C}$

d) $\dfrac{2x}{7}\sqrt{x^2-6x+10}+\mathcal{C}$

e) $2\sqrt{x^2-6x+10}+7\ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+10}\right)+\mathcal{C}$

f) $2\sqrt{x^2-6x+10}+7\ln\left(x+\sqrt{x^2-6x+10}\right)+\mathcal{C}$

AM 172 Fie $I\subset(0,\infty)$ un interval şi funcţia $f:I\to\mathbb{R}$,

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\ .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int f\left(x\right)dx$.

a) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

b) $3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

c) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

d) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

e) $2\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}-3\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

f) $3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

AM 173 Fie $a\in\mathbb{R}$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^5\sqrt[3]{(a^3+x^3)^2}.$$

Să se determine familia primitivelor funcţiei f.

a) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\frac{a^3}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

b) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\frac{a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}-\frac{a^2}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^3}+\mathcal{C}$

d) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\frac{a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

e) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\frac{a^2}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

f) $\frac{5}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\frac{3a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

AM 174 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{2-e^x}{e^x+e^{2-x}}\ .$$

a) $\frac{2}{e}\mathrm{arctg}\, e^{x-1}-\ln\left(e^{2x}+e^2\right)+\mathcal{C}$

b) $2\mathrm{arctg}\, e^{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+e^2\right)+\mathcal{C}$

c) $\frac{2}{e}\mathrm{arctg}\, e^{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(e^{2(x-1)}+1\right)+\mathcal{C}$

d) $\frac{1}{e}\mathrm{arctg}\, e^{x}-\frac{1}{2}\ln\left(e^{2(x-1)}+1\right)+\mathcal{C}$

e) $2\mathrm{arctg}\, e^{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+e^2\right)+\mathcal{C}$

f) $\frac{2}{e}\mathrm{arctg}\, e^{x}-\ln\left(e^{2(x-1)}+1\right)+\mathcal{C}$

AM 175 Fie funcţiile[4] :

$$\mathrm{ch}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \mathrm{ch}\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad \text{şi respectiv}\quad \mathrm{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \mathrm{sh}\ x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ .$$

[4]Funcţia ch se numeşte *cosinus hiperbolic*, iar funcţia sh se numeşte *sinus hiperbolic*

Să se determine primitiva F a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \text{ch}^2\, x \cdot \text{sh}^2\, x$, care verifică relaţia $F(0) = 0$.

a) $\dfrac{e^{4x}}{64} - \dfrac{e^{-4x}}{64} - \dfrac{x}{8}$

b) $-\dfrac{x}{16} + \dfrac{1}{32}\,\text{sh}\, 4x$

c) $\dfrac{e^{4x}}{64} - \dfrac{e^{-4x}}{64} + 2x$

d) $-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\,\text{ch}\, x$

e) $\dfrac{e^{2x}}{16} + \dfrac{e^{-2x}}{16} + \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{8}$

f) $\dfrac{e^{4x}}{64} + \dfrac{e^{-4x}}{64} + \dfrac{e^{2x}}{16} + \dfrac{e^{-2x}}{16} - \dfrac{5}{32}$

AM 176 Să se determine familia primitivelor funcţiei

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}\,.$$

a) $\ln \dfrac{1+\cos x}{1-\sin x} + \mathcal{C}$

b) $\dfrac{1}{2}\ln \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + \mathcal{C}$

c) $\dfrac{1}{2}\ln \left|\dfrac{1+\text{tg}\, x}{1-\text{tg}\, x}\right| + \mathcal{C}$

d) $\dfrac{1}{2}\ln \dfrac{1+\sin x}{1-\cos x} + \mathcal{C}$

e) $\ln \left|\dfrac{1+\text{tg}\,\dfrac{x}{2}}{1-\text{tg}\,\dfrac{x}{2}}\right| + \mathcal{C}$

f) $\ln \left|\dfrac{1+\text{tg}\, x}{1-\text{tg}\, x}\right| + \mathcal{C}$

AM 177 Să se determine familia primitivelor funcţiei

$$f(x) = \frac{1}{\text{tg}^2 x - 1}$$

pe intervalul $I = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

a) $F(x) = \dfrac{x}{2} + \ln\sqrt{\dfrac{1+\text{tg}\, x}{1-\text{tg}\, x}} + \mathcal{C}$

b) $F(x) = \text{tg}\, x + \dfrac{1}{4}\ln\sqrt{\dfrac{1+\text{tg}\, x}{1-\text{tg}\, x}} + \mathcal{C}$

c) $F(x) = 2x + \ln\sqrt{\dfrac{1-\text{tg}\, x}{1+\text{tg}\, x}} + \mathcal{C}$

d)$F(x) = x^2 + \ln\left|\dfrac{\text{tg}\, x - 1}{\text{tg}\, x + 1}\right| + \mathcal{C}$

e) $F(x) = x + \ln\left|\dfrac{\text{tg}\, x - 1}{\text{tg}\, x + 1}\right| + \mathcal{C}$

f) $F(x) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\text{tg}\, x - 1}{\text{tg}\, x + 1}\right| + \mathcal{C}$

AM 178 Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se defineşte

$$I_n = \int \frac{1}{x^n\sqrt{a^2+x^2}}\,dx, \quad x \in (0,\infty).$$

Care dintre următoarele relaţii este adevărată?

a) $I_9 = \dfrac{1}{8a^2}\left(-7I_7 - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$ b) $I_9 = \dfrac{1}{9a^2}\left(-8I_7 - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$

c) $I_9 = \dfrac{1}{9a^2}\left(8I_7 - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$ d) $I_9 = \dfrac{1}{7a^2}\left(8I_7 - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$

e) $I_9 = \dfrac{1}{9a^2}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8} - 8I_7\right)$ f) $I_9 = \dfrac{1}{8a^2}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8} - 7I_7\right)$

AM 179 Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se defineşte

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Să se exprime I_{2017} sub forma $I_{2017} = a\ x^{2016}\sqrt{1+x^2} + b\ I_{2015},\ a,b \in \mathbb{R}$ şi să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $a = b$ b) $a - b = 1$

c) $a \cdot b = 2016$ d) $a = 2017b$

e) $a + b = -2015$ f) $\nexists\ a,b \in \mathbb{R}$ care să verifice relaţia

AM 180 Fie $a \in (0,\infty)$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se consideră

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,\ x \in (-a,a).$$

Atunci:

a) $5I_5 = x^4\sqrt{a^2-x^2} - 3a^2 I_3$

b) $5I_5 = -x^4\sqrt{a^2-x^2} + 4a^2 I_3$

c) $5I_5 = 4x^4\sqrt{a^2-x^2} - 3a^2 I_3$

d) $I_5 = x^4\sqrt{a^2-x^2} - 2a^2 I_3$

e) $I_5 = 4x^4\sqrt{a^2-x^2} - 5a^2 I_3$

f) $4I_5 = x^4\sqrt{a^2-x^2} - 3a^2 I_3$

AM 181 Să se calculeze

$$\int_1^e \frac{1+2\ln x}{x\,(2+\ln x)}\,dx.$$

a) $3\ln 2 + 3\ln 3 + 2$ b) $\ln\frac{9e^2}{32}$ c) $6 + \ln\frac{9}{8e}$

d) $2\ln 2 + 3\ln 3 + 1$ e) $\ln\frac{8e^2}{27}$ f) $4 - \ln\frac{3}{2e}$

AM 182 Să se calculeze

$$\int_0^1 e^{-3x}\cos\pi x\,dx.$$

a) $\frac{3\,(1+e^{-3})}{9+\pi^2}$ b) $\frac{2\,(1+e^{2})}{4+\pi^2}$ c) $\frac{1+e^{-3}}{9+\pi^2}$

d) $\frac{1+e^{3}}{4+\pi^2}$ e) $\frac{2\,(1+e^{3})}{9+\pi^2}$ f) $\frac{3\,(1+e^{-3})}{4+\pi^2}$

AM 183 Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-x^3}{x^4+1}\,dx.$

a) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{8}$ b) $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$ c) $\pi - 2\ln 2$

d) $2\pi - 4\ln 2$ e) $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{2}$ f) $\frac{\pi}{6} - \frac{\ln 2}{3}$

AM 184 Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+4}\,dx.$

a) $\dfrac{\text{arctg } 3-\ln 5}{8}$ b) $\dfrac{\text{arctg } 2-\ln 2}{4}$ c) $\dfrac{2\text{arctg } 3-\ln 2}{4}$

d) $\dfrac{2\text{arctg } 2-\ln 5}{8}$ e) $\dfrac{\text{arctg } 4-\ln 3}{8}$ f) $\dfrac{2\text{arctg } 4-\ln 3}{4}$

AM 185 Să se calculeze $\displaystyle\int_1^e (2x+1)\ln x\, dx$.

a) $\frac{1}{2}(e+3)$ b) $\frac{1}{3}(e^2+2)$ c) $\frac{1}{2}(e^2+3)$

d) $\frac{1}{2}(e^2-2)$ e) $\frac{1}{3}(e-3)$ f) $\frac{1}{3}(e^2+1)$

AM 186 Să se calculeze $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$.

a) $\frac{40}{9}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{50}{9}$ d) $\frac{20}{3}$ e) $\frac{10}{9}$ f) $\frac{40}{3}$

AM 187 Să se calculeze $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{(4x-1)\sqrt{x}}$.

a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$ c) $\ln\frac{9}{2}$ d) $\ln\frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$ f) $3\sqrt{5}$

AM 188 Fie $a\in\mathbb{R}^*$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{3+x^2}, & |x|\le\sqrt{3}\\ 0, & |x|>\sqrt{3}\end{cases}$.

Să se calculeze $F(1)-F(0)$, unde $F(x)=\displaystyle\int_{-e}^{x} f(t)dt$.

a) 0 b) 1 c) $a\sqrt{3}$ d) $2a$ e) $2a\sqrt{3}$ f) $\dfrac{a\pi}{6\sqrt{3}}$

AM 189 Să se calculeze $\displaystyle\int_7^{27} \frac{1}{x+\sqrt{2x-5}}\,dx.$

a) $\ln\dfrac{10}{7} - \operatorname{arctg}\dfrac{2}{25}$ b) $\ln\dfrac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$

c) $\ln\dfrac{17}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{2}{9}$ d) $\ln\dfrac{10}{9} - \operatorname{arctg}\dfrac{9}{25}$

e) $\ln\dfrac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$ f) $\ln\dfrac{34}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$

AM 190 Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| \arcsin x\,dx.$

a) $-\dfrac{\pi}{2}$ b) -1 c) 1 d) $\dfrac{\pi}{2}$ e) 0 f) π

AM 191 Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| \arcsin^2 x\,dx.$

a) $\dfrac{\pi}{8}$ b) $\dfrac{\pi^2}{8}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{8}$ e) $\dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2}$

AM 192 Să se determine valoarea parametrului $a \in (0,\infty)$ pentru care

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^4}{1+e^x}\,dx = 20000.$$

a) 4 b) $\dfrac{1}{2}$ c) e d) 1 e) 10 f) 100

AM 193 Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{1024} \frac{\ln(2017-x)}{\ln[1505^2-(512-x)^2]}\,dx.$

a) 2017 b) $993 \cdot 2017$ c) $1024 \cdot 2017$

d) 512 e) $\dfrac{993 \cdot 2017}{2}$ f) $993 \cdot 1024$

AM 194 Să se calculeze $\int_1^3 x[x]dx$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) $\frac{11}{2}$ b) $\frac{11}{3}$ c) $\frac{13}{2}$ d) $\frac{13}{3}$ e) 4 f) 5

AM 195 Fie $m \in (0, \infty)$ şi funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = [mx]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Să se determine constanta m pentru care $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 2 e) 4 f) 8

AM 196 Să se studieze dacă există $a \in (0, \infty)$ pentru care $\int_{-a}^{a} [x]\, dx = -82$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x. În caz afirmativ, să se precizeze valoarea parametrului a.

a) nu există b) 40 c) 41 d) 81 e) 82 f) 164

AM 197 Să se determine mulţimea valorilor parametrului $m \in [-2, 3]$ pentru care

$$\int_{-2}^{3} (x + |m - x|)\, dx = 9.$$

a) $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

d) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ e) $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ f) $\{-1, 3\}$

AM 198 Să se calculeze $\int_{-2}^{1} (1 - |x|)\, dx$.

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) -2 f) 0

AM 199 Să se calculeze

$$\int_{-2}^{2}\Big(1-\Big||x|-1\Big|\Big)dx.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) -1 f) $-\frac{1}{2}$

AM 200 Să se calculeze

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\sin x,\frac{1}{2}\right\}dx.$$

a) $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}+\frac{3}{2}$

d) $\frac{\pi+6-3\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi+3+3\sqrt{3}}{6}$ f) $\frac{2\pi}{3}+1$

AM 201 Să se calculeze

$$\int_{0}^{\pi}\min\{\sin x,\cos x\}\ dx.$$

a) $\sqrt{2}$ b) $1-\sqrt{2}$ c) 0 d) 2π e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 202 Să se calculeze

$$\int_{0}^{1}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\ dx.$$

a) $\frac{\pi}{2}+1$ b) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}$ c) $\frac{\pi}{4}+1$

d) $\frac{\pi}{8}+1$ e) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ f) $\frac{\pi-1}{4}$

AM 203 Să se calculeze

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{(x^2+9)^2}\, dx.$$

a) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}}{324}$ b) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}+3}{648}$ c) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}+6}{648}$

d) $\dfrac{\pi + 3}{648}$ e) $\dfrac{6\sqrt{3}-3}{648}$ f) $\dfrac{\pi + 3\sqrt{3}-6}{324}$

AM 204 Se consideră funcţia inversabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+7}\ .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{7}} f^{-1}(y)dy$, unde f^{-1} reprezintă inversa funcţiei f.

a) $1+\ln\dfrac{8}{7} - \dfrac{6\sqrt{7}}{7}\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ b) $1+\ln\dfrac{7}{8} - \dfrac{\sqrt{7}}{6}\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

c) $1+\ln\dfrac{8}{7}$ d) $-1-\ln\dfrac{8}{7}+\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

e) $2+\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ f) 0

AM 205 Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ se consideră

$$I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}\ .$$

Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$.

a) 0 b) ∞ c) 2 d) $\ln 3$ e) 1 f) $\dfrac{1}{2}$

AM 206 Să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx\ .$$

a) $\frac{\pi}{3}+\frac{9}{10}\ln\frac{9}{10}$ b) $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$ c) $\frac{\pi}{5}+\frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$

d) $\frac{2\pi}{5}+\frac{10}{3}\ln\frac{2}{9}$ e) $\frac{\pi}{4}+\frac{10}{7}\ln\frac{9}{2}$ f) $\frac{\pi}{5}+\frac{3}{4}\ln\frac{9}{2}$

AM 207 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\cos^2 x}\,dx.$$

a) $\frac{\pi^2}{4}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12}$ f) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}$

AM 208 Fie $a\in\mathbb{R}$. Să se calculeze

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\frac{x}{2}}{1+e^{ax}}dx\ .$$

a) $2a$ b) $\frac{a\pi}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) $e^{a\pi}$ f) $2e^{a}$

AM 209 Să se determine constanta reală a pentru care

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{\sin x\cos x}\,dx=\ln\sqrt[4]{3}.$$

a) 2 b) 1 c) π d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{3}$

AM 210 Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}\,dx.$

a) $\frac{2\sqrt{3}+\pi}{6}$ b) $\frac{6\sqrt{3}-\pi}{2}$ c) $\frac{3\sqrt{3}+\pi}{6}$

d) $\frac{5\sqrt{3}-\pi}{3}$ e) $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{6}$ f) $\frac{5\sqrt{3}+\pi}{2}$

AM 211 Să se calculeze

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 2x \ \sin 2x \ dx.$$

a) 0 b) $-\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{1}{10}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $-\dfrac{1}{5}$ f) 1

AM 212 Să se determine valoarea parametrului $a \in (1, \infty)$ aşa încât

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + \cos 2x} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) 3 d) $\dfrac{4}{3}$ e) $\dfrac{8}{3}$ f) 4

AM 213 Fie şirul de integrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \ dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Să se calculeze produsul $nI(n)I(n-1)$ pentru toate valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\dfrac{n\pi}{2}$ b) $\dfrac{\pi}{2\,(n-1)!}$ c) π d) $\dfrac{\pi}{2}$ e) $\dfrac{n\pi}{n+1}$ f) $\dfrac{\pi\,(n+1)}{4}$

AM 214 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\,(n \arccos\ x)}{\sqrt{1-x^2}} & , \quad |x| < 1 \\ n\ (\text{sign}\ x)^{n+1} & , \quad |x| = 1 \end{cases},$$

unde sign reprezintă funcţia semn. Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f\,(x)\,dx$.

a) $\dfrac{1}{n}$ b) $\cos\dfrac{\pi}{n}$ c) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$

d) $\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{n}$ e) $(-1)^n\cos\dfrac{\pi}{n}$ f) 0

AM 215 Să se calculeze

$$\int_0^{\ln 2}\frac{x}{1+e^{-x}}\,dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{x}{1-e^{-x}}\,dx.$$

a) $\ln 2\ln 3$ b) $\ln 2+4\ln 3$ c) $\ln 2+\ln 3$

d) $2\ln 2\ln 3$ e) $3\ln 2+2\ln 3$ f) $\ln 2+2\ln 3$

AM 216 Să se determine numărul real m pentru care are loc egalitatea

$$\int_0^1\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}dx=m\int_1^2(x-1)^2\sqrt{x}\;dx.$$

a) $3,5$ b) 2 c) 3 d) $1,5$ e) 1 f) $2,5$

AM 217 Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty}I(a)$, unde

$$I(a)=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx,\quad \text{pentru orice } a\in(1,\infty).$$

a) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ d) $\pi\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$ f) 1

AM 218 Să se calculeze

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^{a^2}e^{-\sqrt{x}}\,dx.$$

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4 e) ∞ f) $\dfrac{1}{4}$

AM 219 Să se calculeze

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\displaystyle\int_0^{\cos x} e^{t^2} dt}{\displaystyle\int_0^{\operatorname{ctg} x} \ln(t^2+2) dt}.$$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\ln 2}$ d) $\frac{2}{\ln 2}$ e) 0 f) $\ln 2$

AM 220 Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\, dt$. Atunci:

a) F este crescătoare

b) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=0$

c) F este funcţie pară

d) F este descrescătoare

e) $F(1)=0$

f) răspunsurile precedente sunt false

AM 221 Să se calculeze $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(101x)\cdot\sin^{99} x\, dx.$

a) $\frac{\sqrt{3}}{100\cdot 2^{101}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{101\cdot 2^{100}}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{100\cdot 2^{101}}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{101\cdot 2^{100}}$ e) $\frac{1}{2^{101}}$ f) $\frac{1}{10100}$

AM 222 Se consideră funcţia continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(2x)=3f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Dacă

$$\int_0^1 f(x)dx=1\ ,$$

să se calculeze

$$\int_1^2 f(x)dx.$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

AM 223 Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n^2}}\right)$.

a) 1 b) 0 c) $\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2}-2$ e) $2\sqrt{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 224 Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n=\frac{\pi}{3n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3n}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3n}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3n}\right)\right].$$

a) π b) $\frac{3}{\pi}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{\pi}\ln 3$ f) $\ln 2$

AM 225 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3}{\pi}$ c) $\frac{2}{\pi}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) 1 f) $\frac{\pi}{6}$

AM 226 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{3(n+k)-2}.$$

a) $\frac{3}{2}$ b) $2+\ln 3$ c) $\frac{1}{2}\ln 3$ d) $\frac{2}{3}\ln 2$ e) $\frac{1}{3}\ln 2$ f) ∞

AM 227 Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n\cdot\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$.

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{e}{2}$ e) e f) ∞

AM 228 Fie $a \in (0, \infty)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1) \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-ax^2} dx.$

a) e^a b) e^{-a} c) $1 + ae^2$ d) e^{-2a} e) e^{2a} f) $1 - ae^2$

AM 229 Un mobil porneşte de pe loc şi se deplasează în linie dreaptă timp de T minute, $T > 1$, număr întreg, cu viteza

$$v(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t \le 60 \\ 60 + \dfrac{1}{\pi} \sin \pi (t - 60) & , \quad 60 < t \le 60T \end{cases}$$

măsurată în metri/secundă. Să se calculeze a_1, acceleraţia atinsă de mobil la un minut de la pornire, şi d, distanţa parcursă în cele T minute.

a) $a_1 = 60T$ m/s^2 şi $d = 1740 - T$ m

b) $a_1 = 2T$ m/s^2 şi $d = 1740 + 60T$ m

c) $a_1 = 60T$ m/s^2 şi $d = 1800 - T$ m

d) $a_1 = 2T$ m/s^2 şi $d = 1800 + 60T$ m

e) $a_1 = 1$ m/s^2 şi $d = 1800(2T - 1)$ m

f) $a_1 = 1$ m/s^2 şi $d = 1800 + 60T$ m

AM 230 Variaţia sumei depuse într-un cont bancar de-a lungul unui deceniu este descrisă de funcţia[5] $S : [0, 10] \to \mathbb{R}$,

$$S(t) = 2000 - 10t \cdot \exp\left(5 - \frac{t^2}{8}\right).$$

Să se stabilească la câţi ani (notaţie: $t_{\min}$) de la iniţierea contului depozitul atinge valoarea minimă $S_{\min}$ şi care sunt valorile S_{min} şi respectiv S_{md}, unde S_{md} este valoarea medie a funcţiei S în acest interval de timp.

a) $t_{\min} = 3$ ani, $S_{\min} = 2000 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 20e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 2000$

[5] Notaţia exp este folosită adesea pentru funcţia exponenţială cu baza e (baza logaritmului natural); prin urmare funcţia $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $\exp(x) = e^x$.

b) $t_{\min} = 2$ ani, $S_{\min} = 2000 - 18e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 18e^5 + 1800$

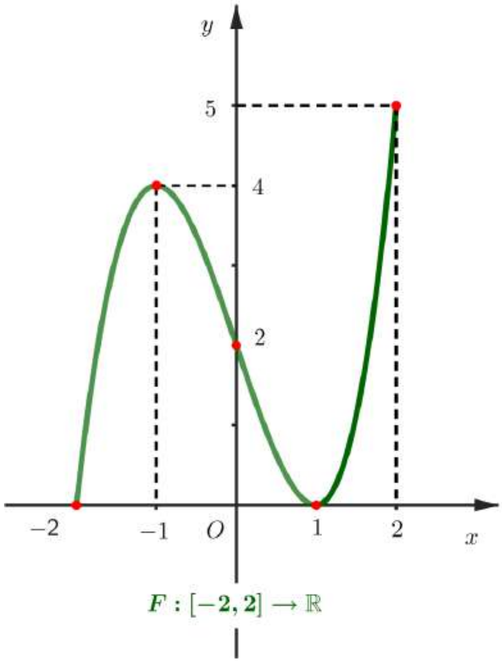
c) $t_{\min} = 3$ ani, $S_{\min} = 1800 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 18e^5 + 2000$

d) $t_{\min} = 5$ ani, $S_{\min} = 1800 - 18e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 1800$

e) $t_{\min} = 2$ ani, $S_{\min} = 2000 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 20e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 2000$

f) Toate răspunsurile precedente sunt greşite

AM 231 Graficul unei primitive F a unei funcţii continue $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ este dat mai jos.



Câte dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

(*i*) $F'(1) = f(1)$ (*ii*) $f(1) = F(1)$ (*iii*) $\int_0^2 f(x)dx = 3$

(*iv*) $f(F(-2)) > 0$ (*v*) $f(x) < 0, \forall x \in (-1, 1)$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 232 Să se determine aria subgraficului funcţiei

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x+3}\ .$$

a) $\ln\frac{16}{9}$ b) $2-\ln\frac{16}{9}$ c) $1-\ln\frac{16}{9}$

d) $\ln\frac{9}{16}$ e) $1-\ln\frac{9}{16}$ f) 2

AM 233 Să se determine aria mulţimii mărginite cuprinse între

$$y = \frac{x^2+3}{x+3} \quad \text{şi} \quad y = 2.$$

a) $12-3\ln 3$ b) $12+3\ln 3$ c) $16-3\ln 3$

d) $16-12\ln 3$ e) $16-\ln 12$ f) $\ln 12$

AM 234 Să se calculeze aria domeniului mărginit ce este cuprins între parabolele

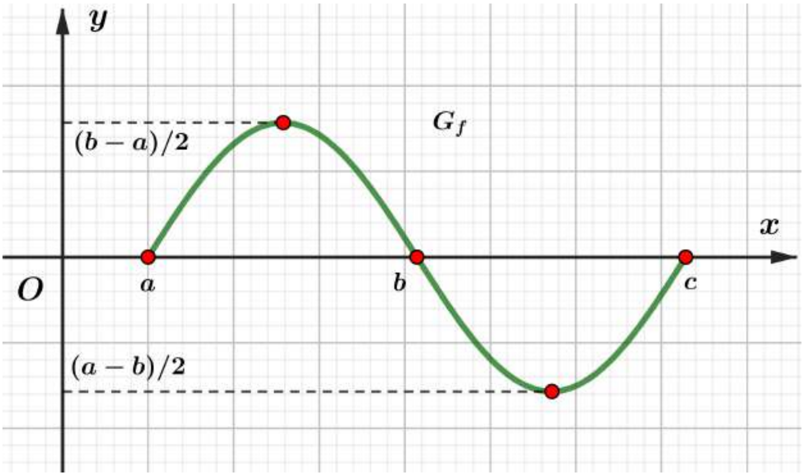
$$y = 2x^2+5x-3 \text{ şi } y = 6-x-x^2.$$

a) 2^5 b) 12 c) 2^4 d) 60 e) 2^6 f) 34

AM 235 Să se determine aria domeniului mărginit delimitat de parabola $y^2 = 10x$ şi dreapta $y = 5x$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

AM 236 Graficul unei funcţii de două ori derivabile $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ este afişat mai jos.



Care dintre următoarele propoziţii sunt adevărate ?

A_1: Există o funcţie constantă $g : [a, b] \to (0, \infty)$ astfel încât aria subgraficului lui g să coincidă cu aria subgraficului lui $f|_{[a,b]}$

A_2: Există cel mult un punct $x_0 \in (a, c)$ cu proprietatea că $f'(x_0) = 0$

A_3: $\displaystyle\int_a^c f(x)\ dx = 2\int_a^b f(x)\ dx$

A_4: Punctul $x_0 = b$ este punct de inflexiune pentru f

A_5: Funcţia $f : [a, c] \to \left[\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right]$ este surjectivă

A_6: $\displaystyle\int_a^c |f(x)|\ dx > \frac{(b-a)^2}{2}$

a) A_1, A_4, A_5 şi A_6 b) A_3 şi A_5 c) A_1, A_3, A_4 şi A_5

d) toate e) A_2 şi A_4 f) A_3, A_5 şi A_6

AM 237 Să se determine volumul corpului de rotaţie generat de graficul funcţiei
$$f : [0,6] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{7 - x^2 + 6x}.$$

a) $\pi\left(3\sqrt{3} + 12 \arcsin \dfrac{1}{4}\right)$ b) $\pi\left(3\sqrt{7} - 12 \arcsin \dfrac{1}{4}\right)$

c) $\pi\left(3\sqrt{7} + 16 \arcsin \dfrac{3}{4}\right)$ d) $\pi\left(\ln \dfrac{3}{4} + 16 \arcsin \dfrac{3}{4}\right)$

e) $\pi\left(3\sqrt{7} + \ln \dfrac{3}{4}\right)$ f) $\pi\left(7\sqrt{3} - 16 \arcsin \dfrac{5}{6}\right)$

AM 238 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei
$$f : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f\,(x) = x\cos x.$$

a) $\dfrac{4\pi^4}{9} - \dfrac{3\pi^2}{2}$ b) $\dfrac{1}{16}\pi^2\,(3\pi^2 + 2)$ c) $\dfrac{\pi^4}{16} - \dfrac{3\pi^2}{4}$

d) $\dfrac{9\pi^4}{16} - \dfrac{3\pi^2}{8}$ e) $\dfrac{3}{8}\pi^2\,(\pi^2 - 2)$ f) $\dfrac{8\pi^4}{9} - \dfrac{3\pi^2}{8}$

AM 239 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a cercului de ecuaţie $x^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$.

a) 2π b) $2\pi^2$ c) π d) π^2 e) 4π f) $4\pi^2$

AM 240 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a elipsei de ecuaţie $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$.

a) 12π b) 10π c) 16π d) $12\pi^2$ e) $10\pi^2$ f) $16\pi^2$

AM 241 Să se determine parametrul real m aşa încât volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei

$$f:[1,2]\to\mathbb{R},\quad f(x)=2\left(x-\frac{m}{x}\right),$$

în jurul axei Ox să fie egal cu volumul unei sfere de rază 1.

a) 3 b) 2 c) -1 d) -2 e) 4 f) -3

AM 242 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei

$$f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x}.$$

a) $\pi\ln\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\pi\ln\frac{4}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{3\pi}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\frac{4\pi}{\sqrt[3]{3}}$ e) $\pi\ln\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ f) $\pi\ln\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

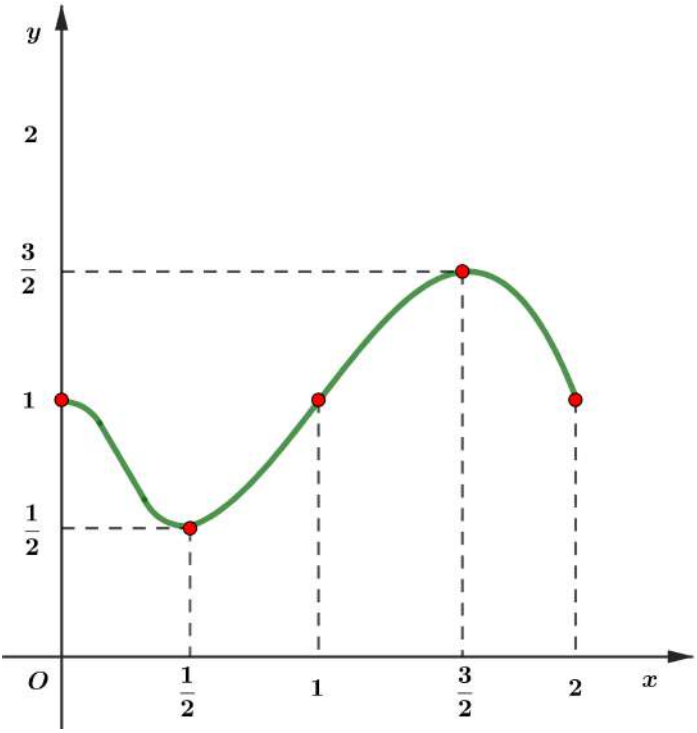
AM 243 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei

$$f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $\pi\ln\frac{5}{13}$ b) $3\pi\ln\frac{13e}{5}$ c) $\pi\ln\frac{5}{13}$

d) $3\pi\ln\frac{5e}{13}$ e) $2\pi\ln\frac{13}{5e}$ f) $2\pi\ln\frac{5e}{13}$

AM 244 Fie funcţia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, derivabilă de două ori, al cărei grafic este dat în figura de mai jos. Tangenta la graficul acestei funcţii în punctul de inflexiune $(1,1)$ trece prin punctul de coordonate $\left(2, \frac{5}{2}\right)$. Câte dintre următoarele propoziţii sunt adevărate?



A_1: $1 \leq \int_0^2 f(x)\,dx \leq 3$

A_2: $\int_0^2 f^2(x)\,dx \geq \frac{91}{40}$

A_3: $\int_0^2 \sqrt{f(x)}dx \leq 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

A_4: $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{2} \quad (\forall)\, x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

A_5: $f'(x) \geq 0 \quad (\forall)\, x \in [0,2]$

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1 f) 0

ANEXE

Subiectele date la admitere în anii 2014-2024 cu rezolvările integrale

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 22.07.2014 **A**

1.(8p) Fie ecuaţia $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x+7}=3$. Să se determine suma modulelor rădăcinilor ecuaţiei.

a) 1 b) 29 c) 36 d) 25 e) 37

2.(10p) Să se calculeze

$$E=\sum_{i=1}^{2014}\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i}k!(k^2+1)\right].$$

a) 2014! b) $2014!-1$ c) 2015! d) $2015!-2$ e) $2016!-2$

3.(8p) Fie matricea $A=(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu elementele date de

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j}, \text{ dacă } i=j,\\ (-1)^{i+j}C_j^i, \text{ dacă } i<j,\\ 0, \text{ dacă } i>j,\end{cases}$$

unde C_j^i reprezintă combinări de j luate câte i. Să se calculeze A^{-1}.

a) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4.(7p) Se consideră grupul $(\mathcal{M},\cdot)$, unde

$$\mathcal{M}=\left\{A(m)=\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ m\in\mathbb{Z}\right\}$$

şi " $\cdot$ " este operaţia de înmulţire a matricelor. Să se determine simetricul elementului $A(2014)$.

a) $A(1)$ b) $A(0)$ c) $A(-2014)$ d) $A(-1)$ e) $A\left(\dfrac{1}{2014}\right)$

5.(9p) Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2014)(X - 2016) \text{ şi } g = (X - 2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărţirii lui g la f.

a) $X + 2014$ b) $X - 2000$ c) $X - 2016$ d) $X - 2014$ e) $X + 2016$

6.(9p) Ştiind că $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ şi $\sin a + \cos a = \dfrac{7}{5}$, să se afle $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2}$.

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $\dfrac{1}{2}$ şi $\dfrac{1}{3}$ e) $\sqrt{2} - 1$

7.(7p) Dreapta $d : 2x + y - 2 = 0$ intersectează axele de coordonate în punctele A şi B. Să se determine coordonatele punctului C astfel ca punctul $G(3, 2)$ să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

a) $(8, 4)$ b) $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ c) $(3, 5)$ d) $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ e) $(6, 2)$

8.(9p) Fie funcţia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

a) $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ b) $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$, $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$ c) $y = -\dfrac{\pi}{2}x + 1$

d) nu există e) $y = -\dfrac{\pi}{2}x + 1$, $y = \dfrac{\pi}{2}x + 1$

9.(7p) Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

a) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = -1$

b) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 2$

c) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 1$

d) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$

e) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 0$

10.(10p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât funcţia să aibă un extrem în punctul $x = 1$.

a) -2 b) 1 c) -1 d) 3 e) 2

11.(9p) Să se calculeze

$$\int_{-1}^{0} |4x^2 - 11x - 3| dx.$$

a) $\frac{435}{96}$ b) $\frac{135}{32}$ c) $\frac{221}{48}$ d) $\frac{37}{96}$ e) $\frac{231}{48}$

12.(7p) Calculaţi aria cuprinsă între graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln^2 x$, axa Ox şi dreptele $x = \frac{1}{e}$ şi $x = e$.

a) $\frac{e^2}{2} - \frac{5}{4e^2}$ b) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$ c) $\frac{e^2}{2} - \frac{3}{4e^2}$

d) $\frac{e^2}{4} - \frac{7}{4e^2}$ e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{4e^2}$

SOLUŢII AC+ETC 2014

1. Punem condiţia de existenţă $x+7\geq 0$ şi obţinem $x\in[-7,+\infty)$.

Notăm $\sqrt[3]{2-x}=u$ şi $\sqrt{x+7}=v$ şi atunci avem $2-x=u^3$ şi $x+7=v^2$, de unde obţinem sistemul

$$\begin{cases} u^3+v^2=9 \\ u+v=3 \end{cases}$$

cu soluţiile $u_1=0$, $v_1=3$, $u_2=2$, $v_2=1$, $u_3=-3$ şi $v_3=6$, adică $x_1=2$, $x_2=-6$ şi $x_3=29$.

În concluzie, suma modulelor rădăcinilor ecuaţiei este

$$|2|+|-6|+|29|=37.$$

Răspuns corect: e).

2.

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i}k![(k+1)^2-2(k+1)+2]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i}[k!(k+1)(k+1)-2k!(k+1)+2k!]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\left[\sum_{k=1}^{i}[(k+1)!(k+1)]-2\sum_{k=1}^{i}[(k+1)!-k!]\right]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\left[\sum_{k=1}^{i}[(k+1)!(k+2-1)]-2[(i+1)!-1]\right]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\frac{1+i}{i}\left[\sum_{k=1}^{i}[(k+2)!-(k+1)!]-2(i+1)!+2\right]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\frac{1+i}{i}[(i+2)!-2-2(i+1)!+2]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\frac{1+i}{i}[(i+1)!(i+2)-2(i+1)!]\right\}=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{2014}\left[\frac{1+i}{i}(i+1)!i\right] = \sum_{i=1}^{2014}[(1+i)(i+1)!] = \\
&= \sum_{i=1}^{2014}[(2+i-1)(i+1)!] = \sum_{i=1}^{2014}[(2+i)!-(i+1)!] = \\
&= 2016!-2
\end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

3. Cum

$$a_{11}=(-1)^{1+1}=1, \quad a_{22}=(-1)^{2+2}=1, \quad a_{33}=(-1)^{3+3}=1,$$

$$a_{12}=(-1)^{1+2}C_2^1=-2, \quad a_{13}=(-1)^{1+3}C_3^1=3, \quad a_{23}=(-1)^{2+3}C_3^2=-3,$$

$$a_{21}=0, \quad a_{31}=0, \quad a_{32}=0,$$

rezultă că

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi atunci

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: b).

4. Simetricul elementului

$$A(2014)=\begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

în raport cu înmulţirea matricelor este

$$[A(2014)]^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A(-2014).$$

Răspuns corect: c).

5. Cum restul împărţirii polinomului g la f este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$g = f \cdot q + ax + b,\ \ a, b \in \mathbb{R},$$

unde q este câtul împărţirii, adică

$$(x-2015)^{2014} + x - 2001 = (x-2014)(x-2016) \cdot q + ax + b.$$

Pentru $x = 2014$ şi $x = 2016$, ecuaţia precedentă ne conduce la sistemul

$$\begin{cases} 2014a + b = 14 \\ 2016a + b = 16 \end{cases}$$

cu soluţia $a = 1$ şi $b = -2000$.

În concluzie, restul căutat este $X - 2000$.

Răspuns corect: b).

6. Cum $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ rezultă că $\dfrac{a}{2} \in \left(0, \dfrac{\pi}{8}\right)$, iar $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2} \in \left(0, \sqrt{2} - 1\right)$, deoarece

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - 1 = 0,$$

adică $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Deci, relaţia din enunţ este echivalentă cu

$$\frac{2\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{7}{5}, \ \ \text{unde} \ \ \operatorname{tg} \frac{a}{2} \in \left(0, \sqrt{2} - 1\right),$$

adică

$$6\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 5\operatorname{tg} \frac{a}{2} + 1 = 0,$$

de unde obţinem că $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{3}$ este singura soluţie.

Răspuns corect: a).

7. Dreapta d intersectează axele de coordonate în punctele $A(1,0)$ şi $B(0,2)$. Cum punctul G este centrul de greutate al $\triangle ABC$, rezultă că

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \frac{1+0+x_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_C = 8$$

şi

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{0+2+y_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y_C = 4.$$

Răspuns corect: a).

8. Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, rezultă că funcţia f nu are asimptote orizontale. În continuare, verificăm dacă f are asimptote oblice, adică asimptote de forma $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$$

şi

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) \mp \frac{\pi}{2}x\right] = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

În concluzie, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ şi $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Răspuns corect: b).

9. Deoarece

$$f'_s(0) = \lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x\nearrow 0} \sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = $$
$$= \lim_{x\nearrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1$$

şi

$$f'_d(0) = \lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x\searrow 0} \sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = $$
$$= \lim_{x\searrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

rezultă că f nu este derivabilă în 0.

Răspuns corect: d).

10. Cum f admite un extrem în punctul $x = 1$, rezultă că $f'(1) = 0$. Dar

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - (ax+a-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = $$
$$= \frac{ax^2 + a - 2ax^2 - 2ax + 4x}{(x^2+1)^2} = $$
$$= \frac{-ax^2 + (4-2a)x + a}{(x^2+1)^2},$$

ceea ce ne conduce la ecuaţia $4 - 2a = 0$ cu soluţia reală $a = 2$.

Răspuns corect: e).

11. Deoarece

$$|4x^2 - 11x - 3| = \begin{cases} 4x^2 - 11x - 3 \text{ , dacă } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup [3, \infty) \\ -4x^2 + 11x + 3 \text{ , dacă } x \in \left(-\frac{1}{4}, 3\right) \end{cases},$$

integrala devine

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (4x^2 - 11x - 3)dx + \int_{-\frac{1}{4}}^{0} (-4x^2 + 11x + 3)dx =$$

$$= \left(4\cdot\frac{x^3}{3} - 11\cdot\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left(-4\cdot\frac{x^3}{3} + 11\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-\frac{1}{4}}^{0} = \frac{221}{48}\ .$$

Răspuns corect: c).

12. Folosind formula de integrare prin părţi de două ori, obţinem

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{x^2}{2}(\ln^2 x)' dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{x^2}{2}(\ln x)' dx = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} x dx = \\ &= -\frac{1}{e^2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}\ . \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2015 A

1.(7p) Fie ecuaţia $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{8-\sqrt{x}} = 3$. Să se determine suma rădăcinilor ecuaţiei.

a) $S = -49$ b) $S = 49$ c) $S = 0$ d) $S = -48$ e) $S = 48$

2.(9p) Fie şirul $(x_n)_{n>1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{6}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right),\ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine suma elementelor mulţimii

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \right\}.$$

a) 7 b) 18 c) 9 d) 20 e) 12

3.(9p) Fie mulţimile

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2 \text{ } şi \text{ } \left[\frac{1}{|z-3|} \right] = 1 \right\}, \quad P = \{|z| : z \in M\}.$$

Atunci:

a)$P \subset \left(4, \frac{\sqrt{70}}{2}\right]$ b) $P = \left(4, \frac{35}{8}\right)$ c) $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

d) $P \subset (1, 4]$ e) $P = \left(4, \frac{\sqrt{75}}{2}\right)$

4.(8p) Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$ d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c, a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine $(b+c)^a$ ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X^2 + 2$ să fie $X + 1$ şi restul împarţirii lui f la $X + 1$ este 3.

a) 49 b) 32 c) $\frac{1}{64}$ d) 64 e) -27

6.(10p) Fie OA şi OB două raze perpendiculare în cercul de centru O şi rază $2\sqrt{5}$. Să se calculeze latura pătratului $MNPQ$, unde $Q \in (OA), P \in (OB)$, iar M şi N aparţin arcului mic AB.

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 2 e) $\sqrt{2}$

7.(8p) Fie C simetricul punctului $A(1,2)$ faţă de punctul $B(3,4)$. Prin C se duce o dreaptă d ce intersectează axa Ox în punctul P. Să se determine toate valorile pantei dreptei d astfel încât aria triunghiului APC să fie egală cu 4.

a) $-3, 1$ b) $\dfrac{6}{5}, \dfrac{6}{7}$ c) $-2, 0$ d) $\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}$ e) $1, \dfrac{6}{5}$

8.(9p) Să se determine

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x\ln(e^x + 1)).$$

a) ∞ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) nu există

9.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}\, dx.$$

a) $\dfrac{\pi}{2} + 1$ b) $\dfrac{\pi}{2} - 1$ c) $\pi + 1$ d) $\pi - \dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\pi - 1}{2}$

10.(8p) Să se determine aria figurii plane situată în cadranul IV, mărginită de parabola $y^2 = 9 - 2x$ şi de dreapta $2x - 3y = 9$.

a) 9 b) $\dfrac{9}{2}$ c) 18 d) $\dfrac{9}{4}$ e) 24

11.(8p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulţimea absciselor punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{-1,0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0,1\}$ d) $\{-1,1\}$ e) $\{1\}$

12.(7p) Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=xlnx$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1.

a) $2y-x+1=0$ b) $y-x-1=0$ c) $y+x=0$ d) $y-x+1=0$ e) $y-2x+1=0$

SOLUŢII AC+ETC 2015

1. Notând $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=u$, $\sqrt[3]{8-\sqrt{x}}=v$ şi eliminând x din cele două relaţii, se obţine:

$$u+v=3, u^3+v^3=9,$$

cu soluţiile $u=2, v=1$ şi $u=1, v=2$. Rezultă $x=49$ sau $x=0$.

Răspuns corect: b).

2. Avem succesiv:

$$x_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{C_{n+1}^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{C_{k+1}^2}\right)$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+2}{k(k+1)}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+2}{k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+2}{k+1}=\frac{n+2}{3n}.$$

Rămâne de rezolvat în $\mathbb{N}$ inecuaţia:

$$\frac{1}{2}\leq\frac{n+2}{3n}\leq\frac{2}{3},$$

deci $n\in\{2,3,4\}$. Răspuns corect: c).

3. Considerăm numărul complex z scris în forma algebrică, adică $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$. Din condiţia $\mid z - 2 \mid= 2$ se obţine $a^2 + b^2 = 4a$, adică $-a^2 + 4a = b^2 \geq 0$, ceea ce implică $a \in [0, 4]$.

Din a doua relaţie, $1 \leq \dfrac{1}{\mid z - 3 \mid} < 2$ rezultă $\dfrac{1}{4} < 9 - 2a \leq 1$, deci $a \in \left[4, \dfrac{35}{8}\right)$. Ţinând acum cont că $a \in [0, 4]$ avem unica soluţie $a = 4, b = 0$ sau $z = 4$, deci $P = \{4\}$.

Răspuns corect: d).

4. Din Teorema Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil dacă şi numai dacă rang $A =$ rang $\bar{A}$. Cum rangul maxim al lui A este 2, rezultă că determinantul lui $\bar{A}$ trebuie să fie 0, adică $m = 1$. Se verifică uşor că pentru $m = 1$ avem rang $A =$ rang $\bar{A} = 2$, deci sistemul este compatibil.

Răspuns corect: e).

5. Aplicând Teorema lui Bézout rezultă că $f(-1) = 3$ şi aplicând apoi Teorema împărţirii cu rest, rezultă că există polinomul Q astfel încât

$$f(x) = (x^2 + 2)Q(x) + x + 1.$$

Coroborând acum cele două informaţii, avem $a - b + c = 4$. Înlocuind în polinomul f pe $c = 4 - a + b$ si împărţindu-l la $X^2 + 2$ se obţine restul $(b - 2)X + 4 - 3a + b$, care trebuie sa coincidă cu $X + 1$. Se obţin $a = 2, b = 3, c = 5$.

Răspuns corect: d).

6. Notând cu x lungimea segmentelor $[OQ]$ şi $[OP]$, cu C proiecţia punctului O pe latura PQ şi cu D proiecţia punctului O pe latura MN rezultă imediat că latura pătratului $MNPQ$ este $x\sqrt{2}$, $OC = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, iar $OD = \dfrac{3x\sqrt{2}}{2}$. Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OMD se obţine că $x = 2$, deci latura pătratului $MNPQ$ este $PQ = 2\sqrt{2}$.

Răspuns corect: c).

7. Cum C este simetricul punctului $A(1,2)$ faţă de $B(3,4)$, se obţine imediat că $C(5,6)$. Fie $P(p,0)$, $p \in \mathbb{R}$. Atunci, aria triunghiului APC se calculează astfel:

$$A_{\Delta APC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |2p+2| = 4,$$

de unde rezultă că $p = 1$ sau $p = -3$. Dacă $p = 1$ atunci panta dreptei AP este $m = \frac{3}{2}$, iar dacă $p = -3$ se obţine $m = \frac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

8. Făcând schimbarea de variabilă $e^x + 1 = y$, avem:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x\ln(e^x+1)) = \lim_{y\to\infty} (\ln^2(y-1) - \ln(y-1)\ln y) = \lim_{y\to\infty} \ln(y-1)\cdot\ln\frac{y-1}{y}.$$

Din cauza nedeterminării $0\cdot\infty$, trecem unul din factori la numitorul celuilalt şi aplicăm apoi de două ori Regula lui l´ Hospital:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\ln\dfrac{y-1}{y}}{\dfrac{1}{\ln(y-1)}} = \lim_{y\to\infty} \frac{-\ln^2(y-1)}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{-2}{y-1} = 0.$$

Răspuns corect: b).

9. Amplificând raportul din integrală cu $\sqrt{x-1}$ se obţine:

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx$$

$$= -\sqrt{1-(x-2)^2}\Big|_1^2 + \arcsin(x-2)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Răspuns corect: b).

10. Punctele de intersecţie ale parabolei $y^2 = 9 - 2x$ cu dreapta $2x - 3y = 9$ sunt $A(0, -3)$ şi $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Cum graficul parabolei se află sub graficul dreptei pe tot interiorul intervalului $\left[0, \frac{9}{2}\right]$, aria suprafeţei determinate de parabolă şi dreaptă se calculează cu formula:

$$A = \int_0^{\frac{9}{2}} \left(\frac{2x-9}{3} + \sqrt{9-2x}\right) dx = \frac{x^2}{3}\Big|_0^{\frac{9}{2}} - 3x\Big|_0^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{3}(9-2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{4}.$$

Răspuns corect: d).

11. Ştiind că mulţimea punctelor de extrem local ale unei funcţii se găsesc printre soluţiile primei derivate, rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$. Se obţin soluţiile $x = \pm 1$. Folosind tabelul de monotonie al funcţiei f se observă că $x = -1$ este punct de maxim local, iar $x = 1$ este punct de minim local al funcţiei f.

Răspuns corect: d).

12. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obţine $y = x - 1$.

Răspuns corect: d).

SESIUNEA: IULIE, DATA 26.07.2016 — A

1.(8p) Să se determine valoarea minimă m, respectiv valoarea maximă M, a funcţiei $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

a) $m = -\frac{1}{4}$, $M = 0$ b) $m = 0$, $M = 42$ c) $m = -42$, $M = 0$

d) $m = 0$, $M = 2$ e) $m = -\frac{1}{4}$, $M = 2$

2.(9p) Să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_2 k^2} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_3 k^2} + ... + \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_{2016} k^2} - \frac{1}{3}.$$

a) $S = 0$ b) $S = \frac{2015}{3}$ c) $S = 2016$ d) $S = \frac{1}{6}$ e) $S = \frac{2}{3}$

3.(7p) Fie $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei X.

a) 11 b) 12 c) 10 d) 4 e) 5

4.(8p) Fie $G = (3, +\infty)$. Să se găsească valorile parametrilor reali a şi b astfel încât legea de compoziţie

$$x * y = xy - 3x - 3y + a$$

să determine pe G o structură de grup abelian, iar aplicaţia $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = e^x + b$ să fie morfism între grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$ şi $(G, *)$.

a) $a = -12$, $b = 3$ b) $a = 3$, $b = 12$ c) $a = 12$, $b = 3$

d) $a = 12$, $b = -3$ e) $a = 3$, $b = -3$

5.(7p) Să se determine numărul de rădăcini întregi n ale polinomul

$$X^3 + X^2 + X - 3.$$

a) 4 b) 0 c) 3 d) 1 e) 2

6.(10p) Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care nu există $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât

$$\cos 4x + (m+3)(\sin x + \cos x)^2 - 3m - 2 = 0.$$

a) $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ b) $m \in [1, 2)$ c) $m = 2$

d) $m = 3$ e) $m \in (2, 3)$

7.(9p) În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -2)$ şi $B(1, 3)$. Să se determine valoarea parametrului pozitiv a pentru care punctul $P(2, a)$ aparţine bisectoarei unghiului AOB.

a) $10\sqrt{2} - 14$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ c) $14\sqrt{2} - 10$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$ e) $\dfrac{1}{10}$

8.(8p) Să se calculeze

$$\lim_{x \searrow 0} x^x.$$

a) $\frac{1}{e}$ b) 0 c) 1 d) ∞ e) e

9.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - e \cdot x$. Să se determine imaginea mulţimii $\mathbb{R}$ prin f.

a) $[1, \infty)$ b) $[e, \infty)$ c) $(-\infty, 0]$ d) $[0, \infty)$ e) $\mathbb{R}$

10.(8p) Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \cdot lnx$. Să se determine panta tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1, 0)$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{3}{2}$ d) 1 e) e

11.(8p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1+\sqrt{\ln x})^3}dx.$$

a) $\frac{5}{4} - 2\ln 2$ b) $2\ln 2 - \frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4} - \ln 4$ d) $\ln 4 - \frac{5}{4}$ e) $2\ln 2 - \frac{5}{6}$

12.(10p) Să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}} \ ,$$

axa Ox şi dreptele $x = 1$, respectiv $x = 3$.

a) $\sqrt{13} - \sqrt{5} + 2\ln\frac{\left(\sqrt{13}-3\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2\ln\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

c) $13\sqrt{5} - 4\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$

d) $4\sqrt{2} + \sqrt{13} - \sqrt{5} + 2\ln\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

e) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} - 2\ln\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

SOLUŢII AC+ETC 2016

1. Cum vârful parabolei asociate funcţiei $f(x)$ este $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, minimul funcţiei pe intervalul $[1,3]$ este $m = -\frac{1}{4}$; în plus, $f(1) = 0, f(3) = 2$, deci maximul este $M = 2$.

Răspuns corect: e).

2. Suma dată se poate scrie succesiv:

$$S = \frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2^2 + \cdots + \log_2 2016^2} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2^2 + \cdots + \log_3 2016^2} +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{\log_{2016} 1 + \log_{2016} 2^2 + \cdots + \log_{2016} 2016^2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{\log_2 1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2016^2} + \frac{1}{\log_3 1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2016^2} + \cdots + \frac{1}{\log_{2016} 1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2016^2} - \frac{1}{3}$$

$$= \log_{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2016^2} 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2016 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Răspuns corect: d).

3. Considerând $X = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, ecuaţia devine:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se obţin relaţiile $2a - 4b + c = 1, b = 2, 5a - 12b + 3c = 3$ de unde $a = 0, b = 2, c = 9$, deci $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: a).

4. Din condiţia ca legea de compoziţie să fie asociativă se obţine $a = 12$. Se observă că pentru această valoare a parametrului a restul axiomelor grupului sunt îndeplinite. Folosind definiţia morfismului între două grupuri, $f(x+y) = f(x) \star f(y)$, avem succesiv:

$$f(x+y) = e^{x+y} + b$$

şi

$$f(x) \star f(y) = e^{x+y} + (b-3)e^x + (b-3)e^y + b^2 - 4b + 12.$$

Egalând cele două expresii, se obţine $(b-3)(e^x + e^y + b + 4) = 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, adică $b = 3$.

Răspuns corect: c).

5. Se observă că suma coeficienţilor polinomului este 0, deci $x = 1$ este rădăcină a polinomului. Împărţind polinomul la $X - 1$ (sau folosind Schema lui Horner) se obţine câtul $X^2 + 2X + 3$ care, având discriminantul negativ, nu mai are rădăcini reale. Deci polinomul are o singură rădăcină întreagă.

Răspuns corect: d).

6. Ecuaţia dată se poate scrie sub forma:

$$-2\sin^2 2x + (m+3)\sin 2x - 2m + 2 = 0.$$

Notând $\sin 2x = t$, ecuaţia devine:

$$-2t^2 + (m+3)t - 2m + 2 = 0,$$

şi are rădăcinile $t_1 = 2, t_2 = \dfrac{m-1}{2}$. Cum prima rădăcină este în afara intervalului $[0, 1]$, rămâne ca şi a doua rădăcină să fie în afara aceluiaşi interval, adică $\dfrac{m-1}{2} < 0$ şi $\dfrac{m-1}{2} > 1$. Se obţine $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Răspuns corect: a).

7. Folosind proprietatea punctelor aflate pe bisectoarea unui unghi de a se afla la distanţe egale de laturile unghiului, punem condiţia $d(P, OB) = d(P, OA)$. Se găsesc ecuaţiile dreptelor $OA : y = -2x$ şi $OB : y = 3x$, deci distanţele de la punctul P aflat pe bisectoare la acestea sunt:

$$d(P, OA) = \frac{\mid 4 + a \mid}{\sqrt{5}}, \quad d(P, OB) = \frac{\mid 6 - a \mid}{\sqrt{10}}.$$

Egalând cele două expresii se obţine $a = 10\sqrt{2} - 14$.

Răspuns corect: a).

8. Observăm că suntem în cazul nedeterminării 0^0, deci avem succesiv:

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} e^{xlnx} = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{lnx}{\frac{1}{x}}}.$$

Aplicând Regula lui l´ Hospital, se obţine:

$$\lim_{x\searrow 0} e^{\frac{lnx}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\searrow 0} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{-\lim\limits_{x\searrow 0} x} = e^0 = 1.$$

Răspuns corect: c).

9. Soluţia ecuţiei $f'(x) = 0$ este $x = 1$ iar limitele la capetele domeniului de definiţie sunt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Folosind tabloul de variaţie al funcţiei, se obţine că $Imf = [0, \infty)$.

Răspuns corect: d).

10. Panta tangentei la graficul funţiei f în punctul $A(1, 0)$ este $f'(1) = 1$.

Răspuns corect: d).

11. Folosind substituţia $\ln x = t$, $\frac{1}{x}\,dx = dt$, integrala devine:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{(1+\sqrt{t})^3}\,dt = 2\int_1^2 \frac{t}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^3}\,dt.$$

Se face apoi schimbarea de variabilă $1 + \sqrt{t} = s$, $\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = ds$ şi se obţine:

$$2\int_1^2 \frac{(s-1)^2}{s^3}\,ds = 2\left(\int_1^2 \frac{1}{s}\,ds - 2\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,ds + \int_1^2 \frac{1}{s^3}\,ds\right) = 2\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Răspuns corect: d).

12. Observând că funcţia f este pozitivă pe intervalul $[2, 3]$ şi negativă pe $[1, 2]$, aria se va calcula astfel:

$$A = \int_1^2 \frac{2-x}{\sqrt{x^2+4}}dx + \int_2^3 \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

$$= 2\ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_1^2 - \sqrt{x^2+4}\Big|_1^2 + \sqrt{x^2+4}\Big|_2^3 - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_2^3$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2\ln\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}\ .$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 25.07.2017 **A**

1.(9p) Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - 2a(x-1) - x(a+1) = -a,$$

unde a este un parametru real. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 - 1$.

a) $9a^2 + 1$ b) $9a^2 - 12a$ c) $9a^2 - 1$ d) $9a^2$ e) $9a^2 - 3a + 12$

2.(7p) Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării binomului

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{2})^{80}\ .$$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

3.(8p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix}.$$

a) 0 b) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$

c) $12(b-a)(c-a)(c-b)$ d) $4(b-a)(c-a)(b-c)$

e) $12(a-b)(c-a)(b-c)$

4.(9p) Fie mulţimea numerelor reale înzestrată cu legea de compoziţie

$$x * y = 2xy - 6(x+y) + 21$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Produsul soluţiilor ecuaţiei $2^x * 2^{-x} = 8$ este:

a) 0 b) -1 c) 1 d) 2 e) $\frac{1}{2}$

5.(10p) Să se determine restul împărţirii polinomului $(2X^3 + X + 1)^{2017}$ la polinomul $X^2 - X + 1$.

a) $X - 1$ b) X c) $X + 1$ d) $-X + 1$ e) $-X - 1$

6.(7p) În paralelogramul $ABCD$, unghiurile $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{ABC}$ au măsurile de $30°$, respectiv $135°$, iar lungimea laturii AD este 3. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$.

a) $\frac{9}{4}(3 - \sqrt{3})$ b) $\frac{3}{2}(3 - \sqrt{3})$ c) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} + 1)$
d) $\frac{9}{4}(\sqrt{3} - 1)$ e) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} - 1)$

7.(8p) Prin punctul A de intersecţie a dreptelor $d_1 : x + y - 2 = 0$ şi $d_2 : 2x - y - 4 = 0$ se duce o dreaptă d paralelă cu dreapta de ecuaţie $y = x$. Fie P un punct oarecare al dreptei d, diferit de A. Să se calculeze raportul dintre distanţa de la P la d_1 şi distanţa de la P la d_2.

a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ e) $2\sqrt{10}$

8.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^4}{x^2 + 1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty} \Big(f(e^x)\Big)^{\frac{1}{x}}.$$

a) e^3 b) e c) 1 d) e^2 e) ∞

9.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$. Să se calculeze $f''(-1)$.

a) $7e$ b) $-7e$ c) e d) $-3e$ e) $4e$

10.(8p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x^2-4x|}$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{2\}$ b) $\{0,2,4\}$ c) $\{2,4\}$ d) $\{0,4\}$ e) $\varnothing$

11.(8p) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_{-a}^{a}\frac{x^4}{e^x+1}\,dx=-\frac{32}{5}\ .$$

a) 1 b) $-\sqrt[3]{3^2}$ c) $-3\sqrt[3]{3^2}$ d) 2 e) -2

12.(10p) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f:[1,3]\to\mathbb{R}$,

$$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{\ln\left(1+x\right)}}{x}\ .$$

a) $\frac{\pi}{3}\ln\frac{27}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}\ln\frac{64}{3}$ c) $\frac{\pi}{3}\ln\frac{9}{4}$ d) $\frac{\pi}{3}\ln\frac{3\sqrt{3}}{4}$ e) $\pi\ln\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2017

1. Deoarece ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $x^2-(3a+1)x+3a=0$, se observă că $x_1+x_2=3a+1$ şi $x_1x_2=3a$, de unde

$$x_1^2+x_2^2-1=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-1=9a^2.$$

Răspuns corect: d).

2. Termenul general din dezvoltarea binomului $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[5]{2})^{80}$ fiind

$$T_{k+1}=C_{80}^{k}(\sqrt[3]{5})^{80-k}(\sqrt[5]{2})^{k}=C_{80}^{k}5^{\frac{80-k}{3}}2^{\frac{k}{5}},\quad k\in\overline{0,80},$$

el este număr raţional dacă şi numai dacă sunt satisfăcute simultan condiţiile:

$$\frac{80-k}{3}\in\mathbb{N}\quad \text{şi}\quad \frac{k}{5}\in\mathbb{N}\ ,$$

adică $k\in\{5,20,35,50,65,80\}$.

Răspuns corect: d).

3. Făcând operaţii cu coloane şi linii, determinantul poate fi scris

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2\end{vmatrix} \overset{C_2:=C_2-C_1}{\underset{C_3:=C_3-C_1}{=}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & -4a+4\\ b^2 & 2b+1 & -4b+4\\ c^2 & 2c+1 & -4c+4\end{vmatrix} \overset{C_3:=C_3+2C_2}{=}$$

$$=6\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1\\ b^2 & 2b+1 & 1\\ c^2 & 2c+1 & 1\end{vmatrix} \overset{L_2:=L_2-L_1}{\underset{L_3:=L_3-L_1}{=}} 6\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1\\ b^2-a^2 & 2(b-a) & 0\\ c^2-a^2 & 2(c-a) & 0\end{vmatrix}=$$

$$=12(b-a)(c-a)(b-c).$$

Răspuns corect: c).

4. Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $2(2^x+2^{-x})=5$, care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=-1$, deci produsul lor este -1.

Răspuns corect: b).

5. Cum restul împărţirii polinomului $(2X^3+X+1)^{2017}$ la X^2-X+1 este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$(2x^3+x+1)^{2017}=(x^2-x+1)\cdot Q(x)+ax+b,\ \ a,b\in\mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărţirii.

Fie ω o rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$. Atunci $\omega^3 = -1$ şi $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, adică $\omega^2 = \omega - 1$ şi înlocuind pe x cu ω în relaţia de mai sus se obţine

$$(\omega - 1)^{2017} = a\omega + b \quad \Leftrightarrow \quad (\omega^2)^{2017} = a\omega + b \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = a\omega + b,$$

de unde rezultă că $a = 1$ şi $b = -1$, deci restul căutat este $X - 1$.

Răspuns corect: d).

6. Aplicând Teorema sinusurilor în triunghiul ABC se obţine că

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad AC = 3\sqrt{2}.$$

Cum $\mathrm{m}(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ şi

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

atunci din Teorema cosinusului avem că

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ACB}) = 9(2 - \sqrt{3}) = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)\right]^2,$$

adică

$$A_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin(\widehat{ABC}) = \frac{9}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Răspuns corect: e).

7. Cum A este punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2, atunci coordonatele lui se găsesc rezolvând sistemul format din ecuaţiile celor două drepte şi obţinem $A(2, 0)$, iar ecuaţia dreptei d este $y = x - 2$.

Fie $P(p, p - 2) \in d$, $p \neq 2$. Raportul cerut este

$$\frac{d(P, d_1)}{d(P, d_2)} = \frac{\frac{2|p - 2|}{\sqrt{2}}}{\frac{|p - 2|}{\sqrt{5}}} = \sqrt{10}.$$

Răspuns corect: c).

8. Funcţia f poate fi scrisă

$$f(x)=\frac{3x^4}{x^2+1}=3x^2\cdot\frac{x^2}{x^2+1}=3x^2\cdot\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=3x^2\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)$$

şi atunci

$$\lim_{x\to\infty}\Big(f(e^x)\Big)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[3e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}+1}\right)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}3^{\frac{1}{x}}e^2\left(1-\frac{1}{e^{2x}+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2.$$

Răspuns corect: d).

9. Observând că $f'(x)=e^{-x}(2x-x^2)$ şi $f''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2)$, rezultă că $f''(-1)=7e$.

Răspuns corect: a).

10. Explicitând modulul, funcţia f devine

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4x}\ , \text{ dacă } x\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)\\ \sqrt{-x^2+4x}\ , \text{ dacă } x\in(0,4),\end{cases}$$

iar derivata sa este

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2-4x}}\ , \text{ dacă } x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)\\ \dfrac{-x+2}{2\sqrt{-x^2+4x}}\ , \text{ dacă } x\in(0,4).\end{cases}$$

Din tabloul de variaţie al funcţiei se observă că punctele de extrem ale funcţiei sunt $\{0,2,4\}$.

Răspuns corect: b).

11. Notând integrala din enunţ cu I şi făcând schimbarea de variabilă $-x=t$ obţinem

$$I=\int_a^{-a}-\frac{t^4}{e^{-t}+1}\,dt=\int_{-a}^{a}\frac{t^4e^t}{e^t+1}\,dt=\int_{-a}^{a}\frac{t^4(e^t+1-1)}{e^t+1}\,dt=$$

$$= \int_{-a}^{a} \left(t^4 - \frac{t^4}{e^t+1} \right) dt = \frac{t^5}{5} \Big|_{-a}^{a} - I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{a^5}{5}$$

Prin urmare, soluţia ecuaţia $\frac{a^5}{5} = -\frac{32}{5}$ este $a = -2$.

Răspuns corect: e).

12. Volumul căutat este

$$V = \pi \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx = \pi \int_1^3 \ln(x+1) \left(-\frac{1}{x} \right)' dx =$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\, dx \right] =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} \ln 2 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right] = \frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4} \ .$$

Răspuns corect: a).

<u>SESIUNEA</u>: SEPTEMBRIE, <u>DATA</u> 13.09.2017 A

1.(8p) Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei

$$\log_2(6x^2 - 11x + 6) = 0.$$

Să se determine $x_1 + x_2$.

a) $\frac{5}{6}$ b) 1 c) $\frac{11}{6}$ d) 8 e) 12

2.(9p) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 1$ şi raţia $r = \frac{1}{2}$. Să se determine a_5.

a) 3 b) $\frac{5}{2}$ c) 4 d) 6 e) $\frac{9}{2}$

3.(8p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze determinantul matricei A^{2017}.

a) 1 b) 2^{2017} c) -2^{2017} d) 0 e) -1

4.(9p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4 \ . \end{cases}$$

a) $(-2, 1, 1)$ b) $(3, -2, -3)$ c) $(-5, -3, 6)$
d) $(0, -1, 0)$ e) $(-14, -21, 24)$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a şi b ştiind că -1 este rădăcină a polinomului f şi restul împărţirii polinomului f la $X - 2$ este 6.

a) $a = 1$, $b = -1$ b) $a = 1$, $b = 4$ c) $a = 2$, $b = 4$
d) $a = 0$, $b = 3$ e) $a = -4$, $b = 1$

6.(8p) Să se calculeze $\operatorname{tg} x$ ştiind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x = \frac{3}{5}$.

a) $-\frac{3}{4}$ b) 1 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $-\frac{4}{5}$

7.(10p) Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $Q(4, -1)$ aparţine dreptei

$$d : 2x + ay - 9 = 0.$$

Să se scrie ecuaţia dreptei ce conţine punctul $P(-1, 1)$ şi este paralelă cu dreapta d.

a) $y = x + 2$ b) $y = -x$ c) $y = 2x + 3$

d) $y = -2x - 1$ e) $y = 2x + 1$

8.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + x^2 + 3$. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x^4}$.

a) -2 b) 0 c) ∞ d) 1 e) 2

9.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 0$

d) $y = -x$ e) $y = x + 1$

10.(8p) Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 1).$$

a) $\{-1, 0\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 1\}$ e) $\varnothing$

11.(10p) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ln^2 x,$$

axa Ox şi dreptele $x = \dfrac{1}{e}$ şi $x = e$.

a) $\dfrac{e^2}{8} - \dfrac{3}{e^2}$ b) $\dfrac{e^2}{16} - \dfrac{7}{4e^2}$ c) $\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{7}{4e^2}$

d) $\dfrac{e^2}{4} - \dfrac{5}{4e^2}$ e) $\dfrac{e^2}{8} - \dfrac{5}{2e^2}$

12.(7p) Să se calculeze integrala nedefinită

$$\int \frac{x - 3}{x^2 + 4x - 5} dx$$

pe un interval $I \subset (1, \infty)$.

a) $\dfrac{4}{3}\ln(x+5)-\dfrac{1}{3}\ln(x-1)+\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

b) $\dfrac{1}{3}\ln(x+5)-\dfrac{4}{3}\ln(x-1)+\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

c) $\dfrac{4}{3}\ln(x+1)+\dfrac{1}{3}\ln(x+5)+\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

d) $\dfrac{1}{3}\ln(x-1)-\dfrac{4}{3}\ln(x+5)+\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

e) $\dfrac{1}{2}\ln(x+5)+\dfrac{4}{3}\ln(x-1)+\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2017

1. Cum $6x^2-11x+6>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $6x^2-11x+5=0$ şi atunci suma soluţiilor ei este $\dfrac{11}{6}$.

Răspuns corect: c).

2. Termenul căutat este $a_5=a_1+4r=1+4\cdot\dfrac{1}{2}=3$.

Răspuns corect: a).

3. Cum $\det A=0$, rezultă că $\det(A^{2017})=(\det A)^{2017}=0$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&2&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A=1\neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x=-14$, $y=-21$ şi $z=24$.

Răspuns corect: e).

5. Din condiţiile $f(-1) = 0$ şi $f(2) = 6$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

care are soluţia $a = 1$ şi $b = 4$

Răspuns corect: b).

6. Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos x = \dfrac{4}{5}$, de unde se obţine că $\text{tg } x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum $Q(4, -1)$ aparţine dreptei d se obţine că $2 \cdot 4 + a \cdot (-1) - 9 = 0$, adică $a = -1$. Din faptul că dreapta căutată este paralelă cu dreapta d rezultă că pantele lor sunt egale cu 2 şi prin urmare, ecuaţia ei este $y = 2x + 3$.

Răspuns corect: c).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4\left(2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4}\right)}{x^4} = 2.$$

Răspuns corect: e).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 0 este:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obţine $y = x$.

Răspuns corect: a).

10. Cum $f'(x) = e^x(x^2-1)$, rezultă că $x = \pm 1$ sunt cele două puncte de extrem ale funcţiei f.

Răspuns corect: b).

11. Aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\ln x dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} x dx = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}.$$

Răspuns corect: d).

12. Integrala poate fi scrisă

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x-5}dx = \int \frac{x-3}{(x-1)(x+5)}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x+5}\, dx = -\frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{4}{3}\ln(x+5) + \mathcal{C}.$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: IULIE, DATA 23.07.2018 A

1.(7p) Fie progresia geometrică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, având termenii strict pozitivi şi raţia 2018. Dacă

$$S = \frac{a_1+a_2}{a_2+a_3} + \frac{a_2+a_3}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{2017}+a_{2018}}{a_{2018}+a_{2019}}\ ,$$

atunci:

a) $S = 1$ b) $S = 2017$ c) $S = \dfrac{2017}{2018}$ d) $S = 2018$ e) $S = \dfrac{2018}{2017}$

2.(8p) Fie mulţimea

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \cdot \overline{z} = 2 \text{ şi } \left| \frac{2z+3}{z-3i} \right| = 1 \right\}.$$

Dacă $S = \sum\limits_{z \in A} z$, atunci:

a) $S = 1 - 2i$ b) $S = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ c) $S = 1 + 2i$

d) $S = 3$ e) $S = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

3.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & C_1^1 \\ C_2^1 & (n+1)^2 & C_2^2 \\ C_3^2 & (n+1)^3 & C_3^3 \end{vmatrix}.$$

a) $n(n+1)(n+2)$ b) 0

c) $n(n+1)(2n-1)$ d) $n(n+1)(2n+1)$

e) $n(n-1)(n+2)$

4.(9p) Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5. \end{cases}$$

Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

a) $\left\{ -\frac{1}{10} \right\}$ b) $\left\{ \frac{1}{10} \right\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\}$

d) $\varnothing$ e) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{10} \right\}$

5.(8p) Se consideră polinoamele

$$f = (X-2018)^{2017} + X - 2020 \text{ şi } g = (X-2017)(X-2019).$$

Să se determine restul împărţirii lui f la g.

a) $4X - 8076$ b) $X + 2019$ c) $2X + 4038$

d) $2X - 2019$ e) $2X - 4038$

6.(7p) În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{B}) = 30°$ şi $AB = 6$ se înscrie pătratul ce are două vârfuri pe ipotenuză şi celelalte două, respectiv, pe câte o catetă. Să se afle lungimea laturii pătratului.

a) $1+\sqrt{3}$ b) $\dfrac{12}{13}(4-\sqrt{3})$ c) $\dfrac{6\sqrt{3}-5}{2}$

d) $\dfrac{12}{13}(4\sqrt{3}-3)$ e) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

7.(9p) Se dau punctele $A(0,1), B(1,1)$ şi $C(4,3)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia înălţimii triunghiului ABC dusă din A. Să se calculeze $m \cdot n$.

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) $-\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{5}{2}$ d) $\dfrac{5}{3}$ e) 1

8.(8p) Se consideră funcţia $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{4-3x^2}{x^3}.$$

Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

a) $\mathbb{R}$ b) $[1,+\infty)$ c) $[-1,1]$ d) $[-1,2]$ e) $[-1,+\infty)$

9.(10p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x}(ax+b),\ a,b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 1,\ f'(0) = 2$.

a) $a = 1,\ b = 1$ b) $a = 3,\ b = 1$ c) $a = 2,\ b = 1$

d) $a = -2,\ b = -1$ e) $a = 1,\ b = -1$

10.(7p) Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{tg} x$, unde D este domeniul maxim de definiţie a funcţiei. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(\operatorname{tg} x)}{3x^3} .$$

a) -1 b) $\dfrac{1}{3}$ c) 0 d) $-\dfrac{1}{3}$ e) $-\dfrac{1}{9}$

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_3^7 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}} .$$

a) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{12}$ b) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{6}$ d) $\dfrac{\pi}{12}$ e) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{6}$

12.(9p) Să se calculeze aria suprafeţei cuprinsă între graficele funcţiilor $f, g : \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \cos x$.

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2} - 2$ c) $2\sqrt{2} - 1$ d) $4\sqrt{2} - 1$ e) $4\sqrt{2} - 2$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2018

1. Cum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică, atunci suma poate fi scrisă

$$S = \frac{a_1 + a_1 r}{a_1 r + a_1 r^2} + \frac{a_1 r + a_1 r^2}{a_1 r^2 + a_1 r^3} + \cdots + \frac{a_1 r^{2016} + a_1 r^{2017}}{a_1 r^{2017} + a_1 r^{2018}} =$$

$$= \frac{a_1(1+r)}{a_1 r(1+r)} + \frac{a_1 r(1+r)}{a_1 r^2(1+r)} + \cdots + \frac{a_1 r^{2016}(1+r)}{a_1 r^{2017}(1+r)} = \frac{1}{r}\cdot 2017 = \frac{2017}{2018}\ .$$

Răspuns corect: c).

2. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci relaţia $z \cdot \overline{z} = 2$ este echivalentă cu

$$a^2 + b^2 = 2. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, relaţia $\left|\dfrac{2z+3}{z-3i}\right| = 1$ poate fi scrisă

$$\left(\frac{2z+3}{z-3i}\right)\cdot\overline{\left(\frac{2z+3}{z-3i}\right)} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right)\cdot\overline{\left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right)} = 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right)\cdot\left(\frac{2a+3-2bi}{a-bi+3i}\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(2a+3)^2+4b^2}{a^2+(b-3)^2} = 1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad b = -2a - 1. \qquad (2)$$

Rezolvând sistemul format din ecuaţiile (1) şi (2), se obţin două soluţii:

$$a_1 = \frac{1}{5},\ b_1 = -\frac{7}{5}, \qquad \text{de unde} \qquad z_1 = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

şi

$$a_2 = -1,\ b_2 = 1, \qquad \text{de unde} \qquad z_2 = -1 + i.$$

În concluzie, $S = z_1 + z_2 = -\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i$.

Răspuns corect: b).

3. Determinantul poate fi scris

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & 1 \\ 2 & (n+1)^2 & 1 \\ 3 & (n+1)^3 & 1 \end{vmatrix} = (n+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & n+1 & 1 \\ 3 & (n+1)^2 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2:=C_2-C_3}{=}$$

$$= (n+1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & n & 1 \\ 3 & (n+1)^2-1 & 1 \end{vmatrix} = n(n+1)(2n+1).$$

Răspuns corect: d).

4. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 0$ şi determinantul principal este

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,$$

rezultă că $\operatorname{rang} A = 2$. Sistemul este incompatibil dacă şi numai dacă determinantul caracteristic este nenul, adică

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad m \neq -\frac{1}{10} \; .$$

Răspuns corect: e).

5. Cum restul împărţirii polinomului f la g este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$(x-2018)^{2017} + x - 2020 = (x-2017)(x-2019) \cdot Q(x) + ax + b, \;\; a, b \in \mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărţirii. Înlocuind in această relaţie pe x cu 2017, respectiv 2019, se obţin relaţiile din următorul sistem

$$\begin{cases} 2017a + b = -4 \\ 2019a + b = 0, \end{cases}$$

de unde $a = 2$ şi $b = -4038$, adică restul împărţirii lui f la g este $2X - 4038$.

Răspuns corect: d).

6. Fie $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $F, G \in [BC]$ astfel încât $DEFG$ este pătratul a cărei latură ni se cere. Notăm lungimea acestei laturi cu x.

Aplicând Teorema unghiului de 30° în triunghiul BDG cu $m(\widehat{BGD}) = 90°$, rezultă că $BD = 2x$, iar

$$\cos(\widehat{DBG}) = \frac{BG}{BD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BG}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad BG = x\sqrt{3}.$$

Analog, în triunghiul ABC cu $m(\widehat{BAC}) = 90°$, avem

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad BC = 4\sqrt{3},$$

iar în triunghiul EFC cu $m(\widehat{EFC}) = 90°$ şi $m(\widehat{FCE}) = 60°$, avem

$$\text{tg }(\widehat{FCE}) = \frac{EF}{FC} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{x}{FC} \quad \Leftrightarrow \quad FC = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Dar $BC = BG + GF + FG$, adică $\frac{x\sqrt{3}}{3} + x + x\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, de unde se obţine $x = \frac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$.

Răspuns corect: b).

7. Cum panta dreptei BC este $\frac{2}{3}$, rezultă că panta înălţimii căutate este $-\frac{3}{2}$, iar ecuaţia ei este $y = -\frac{3}{2}x + 1$. Deci, $m \cdot n = -\frac{3}{2}$.

Răspuns corect: a).

8. Cum funcţia f este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$ şi crescătoare pe intervalul $(2, \infty)$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, rezultă că $Imf = [-1, 1]$.

Răspuns corect: c).

9. Din $f(0) = 1$, rezultă $b = 1$, iar cum $f'(x) = e^{-x}(-ax - b + a)$ se obţine că $a = 3$.

Răspuns corect: b).

10. Aplicând Regula lui l´ Hospital, se obţine

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\text{tg } x)}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } x-\text{tg }(\text{tg } x)}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2(\text{tg } x)}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{9x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{9x^2\cos^2 x}\left(1-\frac{1}{\cos^2(\text{tg } x)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2\ (\text{tg } x)}{9x^2\cos^2 x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2\ (\text{tg } x)}{\text{tg }^2 x}\cdot\frac{\text{tg }^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{9\cos^2 x}=-\frac{1}{9}\ .$$

Răspuns corect: e).

11. Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{x-1}=t$, rezultă că $x=t^2+1$ şi integrala din enunţ devine

$$\int_3^7\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{1}{t^2+2}\ dt=\frac{2}{\sqrt{2}}\ \text{arctg}\ \frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{12}.$$

Răspuns corect: a).

12. Aria suprafeţei căutate poate fi scrisă

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx=4\sqrt{2}-2.$$

Răspuns corect: e).

<u>SESIUNEA</u>: SEPTEMBRIE, <u>DATA</u> 17.09.2018 A

1.(8p) Să se găsească soluţiile reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1-x-2x^2}=-x-1.$$

a) 1 b) -1 c) 4 d) 0 şi 2 e) 3

2.(9p) Care este probabilitatea să se extragă un număr impar dintre numerele de la 1 la 101.

a) $\frac{50}{101}$ b) $\frac{51}{100}$ c) $\frac{49}{100}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{51}{101}$

3.(8p) Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valoarea expresiei $B - \frac{1}{2}(A + A^t)$.

a) O_2 b) A c) B d) $-I_2$ e) I_2

4.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix}.$$

a) $2^3 \cdot 7^3$ b) $2 \cdot 7^3$ c) $2^3 \cdot 7$ d) $-2 \cdot 7^3$ e) $-2^3 \cdot 7$

5.(8p) Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuaţia

$$x * x = -2.$$

a) 1 b) -2 c) 0 d) 4 e) -1

6.(8p) Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel ca tg $x = -2$. Să se calculeze $\cos x$.

a) $-\dfrac{1}{5}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $-\dfrac{1}{3}$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

7.(8p) Se dau punctele $A(2,3), B(-1,2)$ şi $C(3,6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia medianei dusă din A în triunghiul ABC. Să se calculeze $m + n$.

a) -6 b) 3 c) -4 d) -3 e) 4

8.(10p) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^x$, unde $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1}.$$

a) 1 b) e^2 c) ∞ d) e e) e^{-2}

9.(8p) Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x \ln x$. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1.

a) $y = -x$ b) $y = x + 1$ c) $y + 1 = x$

d) $y = x$ e) $y = 2(x - 1)$

10.(7p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1} .$$

Să se determine toate valorile parametrului real nenul m astfel ca funcţia f să aibă două puncte de extrem.

a) $\{-1\}$ b) $(-1, 1)$ c) $(0, 1)$ d) $\mathbb{R}^*$ e) $[0, +\infty)$

11.(7p) Să se calculeze integrala

$$\int\limits_0^{\pi} (x \cos x)^2 \, dx.$$

a) $\dfrac{\pi^2}{6}+\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{3\pi}{4}$ c) $\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{4}$

d) $\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{2}$ e) $\dfrac{\pi^2}{3}+\dfrac{\pi}{4}$

12.(8p) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\left(10x-\frac{3}{x}\right)\ln x,$$

axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=e^2$.

a) $\dfrac{15e^4-7}{2}$ b) $10e^2-\dfrac{7}{2}$ c) $\dfrac{15e^2-1}{2}$

d) $10e^4-\dfrac{7}{2}$ e) $\dfrac{7e^4-15}{2}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2018

1. Punând condiţiile de existenţă în ecuaţia dată se obţine

$$\begin{cases} 1-x-2x^2\geq 0 \\ -x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right] \\ x\in(-\infty,-1] \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

care este soluţie a ecuaţiei.

Răspuns corect: b).

2. Cum de la 1 la 101 sunt 51 de numere impare, probabilitatea cerută este $\dfrac{51}{101}$.

Răspuns corect: e).

3. Expresia din enunţ poate fi scrisă

$$B-\frac{1}{2}(A+A^t)=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2&9\\-7&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-7\\9&4\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&2\\2&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I_2.$$

Răspuns corect: d).

4. Aplicând Regula triunghiului, valoarea determinantului este

$$\begin{vmatrix}1^2&2^2&3^2\\3^2&1^2&2^2\\2^2&3^2&1^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&9\\9&1&4\\4&9&1\end{vmatrix}=1+9^3+4^3-36-36-36=2\cdot 7^3.$$

Răspuns corect: b).

5. Ecuaţia din enunţ poate fi scrisă $x^2+4x+2=-2$, care are soluţia $x=-2$.

Răspuns corect: b).

6. Cum

$$\operatorname{tg} x=-2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sin x}{\cos x}=-2 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x=-2\cos x.$$

Aplicând Teorema fundamentală a trigonometriei se obţine $\cos x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. Dar $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, deci $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Răspuns corect: e).

7. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci $M(1,4)$ şi ecuaţia medianei din A este $y=5-x$, de unde rezultă că $m=-1$ şi $n=5$. Deci, $m+n=4$.

Răspuns corect: e).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}-1\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+6}{x^2-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x+6}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2x+6}}\right]^{\frac{2x^2+6x}{x^2-1}} = e^2.$$

Răspuns corect: b).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obţine $y = x - 1$.

Răspuns corect: c).

10. Cum $f'(x) = \dfrac{-mx^2-2x+m}{(x^2+1)^2}$, rezultă că f are două puncte de extrem dacă şi numai dacă discriminantul ecuaţiei $-mx^2-2x+m=0$ este pozitiv. În concluzie,

$$\Delta = 4 + 4m^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \mathbb{R}^*.$$

Răspuns corect: d).

11. Aplicând Formula de integrare prin părţi, integrala din enunţ devine

$$\int_0^\pi (x\cos x)^2\,dx = \int_0^\pi x^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int_0^\pi \frac{x^2}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx = \frac{\pi^3}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi x\sin 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}\int_0^\pi x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx = \frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi\right) = \frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}.$$

Răspuns corect: c).

12. Cum funcţia f este pozitivă pe intervalul $[1, e^2]$, aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_1^{e^2} \left(10x - \frac{3}{x}\right) \ln x \, dx = 10 \int_1^{e^2} x \ln x \, dx - 3 \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \ln x \, dx.$$

Pentru prima integrala se foloseşte Formula de integrare prin părţi, iar pentru a doua integrală se face schimbarea de variabilă $\ln x = u$, de unde $\frac{1}{x}\, dx = du$ şi atunci se obţine

$$A = 10 \int_1^{e^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx - 3 \int_0^2 u \, du =$$

$$= 10 \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^{e^2} \right) - 3 \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{15e^4 - 7}{2} \, .$$

Răspuns corect: a).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 22.07.2019 A

1.(8p) Fie mulţimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\} \quad \text{şi} \quad B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4ax + 4a^2 = 0\}.$$

Să se determine mulţimea valorilor parametrului real a, ştiind că $A \cap B$ are un singur element.

a) $\{0, 2\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$

2.(7p) Într-o clasă sunt 13 elevi, dintre care 7 sunt fete şi 6 sunt băieţi. În câte moduri se poate forma o grupă de 3 fete şi 2 băieţi?

a) 50 b) 6300 c) 240

d) 1050 e) 525

3.(10p) Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a > b > c$, $\mathrm{m}(\widehat{C}) = 15°$ şi

$$\begin{vmatrix} c^2+ac-2a-4 & ac-2a & a^2-b^2-2c \\ b^2+ab-2a-4 & a^2-c^2-2b & ab-2a \\ b^2c+2bc+bc^2 & a^2b-b^3 & a^2c-c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

a) $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $4+2\sqrt{3}\ ,\ 4-2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{3}\ ,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $2\ ,\ 1$

e) $\sqrt{6}+\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{6}-\sqrt{2}$

4.(8p) Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = x+y-1 \quad \text{şi} \quad x \top y = 2xy-2(x+y)+3.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

a) $a = b = 1$ b) $a = b = \dfrac{1}{2}$ c) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$

d) $a = 1$, $b = 0$ e) $a = 0$, $b = 1$

5.(8p) Să se determine parametrii reali m şi n astfel încât polinomul

$$(X+1)^{17} + mX^2 + n$$

să se dividă cu polinomul $X^2 + X + 1$.

a) $m = 0$, $n = -1$ b) $m = -1$, $n = 0$ c) $m = -1$, $n = -1$

d) $m = 1$, $n = 0$ e) $m = 1$, $n = 1$

6.(9p) Triunghiul ascuţitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ şi aria $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin \widehat{C}$.

a) $\dfrac{4\sqrt{39}}{39}$ b) $\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$ c) $\dfrac{4\sqrt{37}}{37}$ d) $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{17}$

7.(8p) Fie $A(-1,-1), B(-2,3)$ şi $C(4,0)$. Să se afle coordonatele punctului D astfel ca simetricul lui faţă de dreapta BC să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

a) $(1,2)$ b) $\left(\dfrac{34}{15}, \dfrac{53}{15}\right)$ c) $\left(\dfrac{19}{15}, \dfrac{38}{15}\right)$ d) $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$ e) $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$

8.(7p) Să se calculeze

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^{2019}+1}{x^3+1} .$$

a) 2019 b) -673 c) 0 d) -2019 e) 673

9.(8p) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3-1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

a) $y = 7x - 11$ b) $y = 7x$ c) $y = 11x - 7$
d) $7y = x - 11$ e) $7y = x + 11$

10.(9p) Să se determine numărul real şi pozitiv cu proprietatea că diferenţa dintre dublul său şi cubul său este maximă.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) 1 e) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

11.(8p) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f:[1,3]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $2\pi\left(1+\ln\frac{13}{5}\right)$ b) $\pi\left(2+\ln\frac{13}{5}\right)$ c) $2\pi\left(1-\ln\frac{13}{5}\right)$

d) $2\pi\ln\frac{13}{5}$ e) $\pi\left(2-\ln\frac{13}{5}\right)$

12.(10p) Să se calculeze

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}}\frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2}dx\ .$$

a) $\frac{\pi}{14}$ b) $\frac{\pi+1}{14}$ c) $\frac{2\pi+1}{28}$ d) $\frac{\pi+2}{28}$ e) $\frac{1}{28}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2019

1. Cum soluţiile ecuaţiei $x^2-(a+2)x+2a=0$ sunt a şi 2, iar soluţia ecuaţiei $x^2-4ax+4a^2=0$ este $2a$, atunci mulţimea $A\cap B$ are un singur element dacă şi numai dacă

$$2a=a \iff a=0$$

sau

$$2a=2 \iff a=1\ .$$

În concluzie, $a\in\{0,1\}$.

Răspuns corect: c).

2. Cu 7 fete se poate forma o grupă de câte 3 fete în $C_7^3 = 35$ moduri, iar cu 6 băieţi se poate forma o grupă de câte 2 băieţi în $C_6^2 = 15$ moduri. Deci, sunt $35 \cdot 15 = 525$ moduri în care se poate forma o grupă de 3 fete şi 2 băieţi.

Răspuns corect: e).

3. Cum $\triangle ABC$ este dreptunghic cu $a > b > c$, atunci din Teorema lui Pitagora avem că $a^2 = b^2 + c^2$, care înlocuită în determinant ne conduce la relaţia

$$bc(b-2)(c-2)[(b-c)^2 + (a-c)^2 + (a-b)^2] = 0,$$

de unde distingem două cazuri:

a) Dacă $b = 2$, din Teorema sinusurilor, obţinem

$$\frac{2}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ}\ .$$

Cum $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ şi $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ atunci $c = 4 - 2\sqrt{3}$ şi, prin urmare $A_{\triangle ABC} = 4 - 2\sqrt{3}$.

b) Dacă $c = 2$ atunci $A_{\triangle ABC} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Răspuns corect: b).

4. Cum f este un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, \perp, \top)$, atunci

(i) f este bijectivă, de unde rezultă că $a \neq 0$;

(ii) f satisface simultan condiţiile:

$$f(x+y) = f(x) \perp f(y) \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \top f(y) \quad \Rightarrow \quad a \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

În concluzie, $a = \dfrac{1}{2}$ şi $b = 1$.

Răspuns corect: c).

5. Fie ω o rădăcină a polinomului X^2+X+1. Atunci $\omega^3 = 1$ şi $\omega^2+\omega+1 = 0$.
Cum polinomul $(X+1)^{17} + mX^2 + n$ se divide cu polinomul $X^2 + X + 1$ se obţine că

$$(\omega+1)^{17} + m\omega^2 + n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-\omega^2)^{17} + m(-1-\omega) + n = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -(1+m)\omega - m + n = 0,$$

de unde $m = n = -1$.

Răspuns corect: c).

6. Notăm $AB = c$, $AC = b$ şi $BC = a$. Cum

$$A_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2} \cdot \sin A \quad \Leftrightarrow \quad \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

şi atunci din Teorema fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos A = \dfrac{1}{3}$. Aplicând Teorema cosinusului

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Leftrightarrow \quad a = 2\sqrt{17}$$

şi apoi din Teorema sinusurilor $\sin C = \dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum centrul de greutate al $\triangle ABC$ este $G\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ şi $m_{BC} = -\dfrac{1}{2}$, rezultă că ecuaţia dreptei GD este $y = 2x$. De asemenea, ecuaţia dreptei BC este $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ şi dacă $\{E\} = GD \cap BC$ se obţine că $E\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$ şi că E este mijlocul lui $[GD]$. Deci, $D\left(\dfrac{19}{15}, \dfrac{38}{15}\right)$.

Răspuns corect: c).

8. Aplicând Regula lui l´ Hospital se obţine

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^{2019}+1}{x^3+1} = \lim_{x\to -1} \frac{2019x^{2018}+1}{3x^2} = \lim_{x\to -1} 673x^{2016} = 673.$$

Răspuns corect: c).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 7$, se obţine $7x - y - 11 = 0$.

Răspuns corect: a).

10. Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^3$. Cum $f'(x) = 2 - 3x^2$, rezultă că $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ sunt punctele de extrem local ale lui f. În concluzie, f are valoarea maximă pentru $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: b).

11. Volumul căutat este

$$V = \pi \int_1^3 \frac{(x+2)^2}{x^2+4}\,dx = \pi \int_1^3 \left(1 + \frac{4x}{x^2+4}\right)\,dx =$$

$$= \pi \left(x\Big|_1^3 + 2\ln(x^2+4)\Big|_1^3 \right) = 2\pi\left(1 + \ln\frac{13}{5}\right).$$

Răspuns corect: d).

12. Deoarece

$$\frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2} = \frac{x}{(x^2+7)^2} + \frac{\sqrt{7}}{(x^2+7)^2}$$

şi cum $\dfrac{x}{(x^2+7)^2}$ este o fucţie impară, rezultă că integrala ei pe intervalul simetric $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ este nulă. Prin urmare, avem

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2}dx = \sqrt{7}\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{(x^2+7)^2}dx = \frac{\sqrt{7}}{7}\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x^2+7-x^2}{(x^2+7)^2}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7}\left(\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7}dx + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \frac{x}{(x^2+7)^2}dx \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7}\left[\frac{1}{\sqrt{7}} \text{ arctg } \frac{x}{\sqrt{7}}\Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \left(-\frac{1}{2(x^2+7)}\right)' dx\right] =$$

$$= \frac{\pi}{14} - \frac{\sqrt{7}}{7}\left(-\frac{x}{2(x^2+7)}\Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7} dx\right) = \frac{\pi+2}{28} .$$

Răspuns corect: d).

<u>SESIUNEA</u>: SEPTEMBRIE, <u>DATA</u> 14.09.2019 A

1.(10p) Câte numere întregi are mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R},\ |2x-3| \leq 6\} \ ?$$

a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6

2.(8p) Să se calculeze

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5} .$$

a) 5 b) -5 c) 1 d) -1 e) i

3.(8p) Să se determine matricea X care verifică relaţia

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.(10p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + y + 3z = 20\ . \end{cases}$$

a) $(1, 1, -1)$ b) $(8, -2, 1)$ c) $(2, -1, 5)$

d) $(2, -7, -1)$ e) $(6, -1, 1)$

5.(7p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a^2+x^2 & b^2+x^2 & c^2+x^2 \\ a^3+x^3 & b^3+x^3 & c^3+x^3 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f'(x)$.

a) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc]$

b) $f'(x) = (a-b)(c-a)(c-b)[x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc]$

c) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

d) $f'(x) = (b-a)(c-a)(b-c)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

e) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[2x^2 - 3(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

6.(8p) Să se calculeze $\sin(2x)$, ştiind că $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

7.(8p) Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x + 1$, iar B proiecţia lui A pe dreapta de ecuaţie $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparţine dreptei:

a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$

d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$

8.(9p) Să se calculeze

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1} .$$

a) 6 b) 0 c) 1 d) 3 e) 12

9.(9p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x + 3x - 1$. Să se determine $f'(0)$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10.(8p) Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x}$. Să se determine punctul de extrem local al lui f.

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x - 5}}\, dx.$$

a) $\ln \dfrac{10}{7} - \operatorname{arctg} \dfrac{2}{25}$ b) $\ln \dfrac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$

c) $\ln \dfrac{17}{5} - \operatorname{arctg} \dfrac{2}{9}$ d) $\ln \dfrac{10}{9} - \operatorname{arctg} \dfrac{9}{25}$

e) $\ln \dfrac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$

12.(7p) Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x)$$

să fie primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \cos 4x$.

a) $a = \dfrac{1}{7}, b = -\dfrac{1}{7}$ b) $a = -\dfrac{1}{17}, b = \dfrac{4}{17}$ c) $a = \dfrac{4}{17}, b = -\dfrac{4}{17}$

d) $a = b = \dfrac{5}{17}$ e) $a = -\dfrac{1}{7},\ b = \dfrac{4}{7}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2019

1. Inecuaţia din enunţ este echivalentă cu $-6 \leq 2x - 3 \leq 6$, de unde se obţine că $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$, deci $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

În concluzie, mulţimea conţine 6 numere întregi.

Răspuns corect: e).

2. Fracţia din enunţ poate fi scrisă

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5} = \frac{i^{1+2+3+4+5}}{i - 1 - i + 1 + i} = \frac{i^{15}}{i} = i^{14} = i^{4 \cdot 3+2} = i^2 = -1\ .$$

Răspuns corect: d).

3. Se observă ca matricea X este de forma $(a\ b\ c)$ şi atunci ecuaţia matriceală devine

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (a\ b\ c) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

de unde se obţine că $a = 2$, $b = -1$ şi $c = 3$, deci matricea căutată este $X = (2\ \ -1\ 3)$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = -5 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x = 2$, $y = -1$ şi $z = 5$.

Răspuns corect: c).

5. Funcţia din enunţ poate fi scrisă

$$f(x) \overset{\substack{C_2:=C_2-C_1 \\ C_3:=C_3-C_1}}{=} \begin{vmatrix} a+x & b-a & c-a \\ a^2+x^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \\ a^3+x^3 & (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+x & 1 & 1 \\ a^2+x^2 & b+a & c+a \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} \overset{C_3:=C_3-C_2}{=}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & c-b \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & (c-b)(a+b+c) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & 1 \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & a+b+c \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)[(a+x)(a+b)(a+b+c) + a^3 + x^3 -$$

$$-(a+x)(b^2+ab+a^2) - (a^2+x^2)(a+b+c)],$$

de unde se obţine că $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc]$.

Răspuns corect: c).

6. Cum $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $x = \dfrac{\pi}{6}$, de unde se obţine că $\sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns corect: d).

7. Fie $A(a, a+1)$, $a \in \mathbb{R}$, atunci $B(3, a+1)$ şi mijlocul segmentului (AB) este $M\left(\dfrac{3+a}{2}, a+1\right)$ care aparţine dreptei $y = 2x-2$, pentru că

$$a+1 = 2\cdot\frac{3+a}{2} - 2.$$

Răspuns corect: d).

8. Aplicând Regula lui l´ Hospital se obţine

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x+1}{1}=6.$$

Răspuns corect: a).

9. Cum $f'(x)=2e^x+3$, rezultă că $f'(0)=5$.

Răspuns corect: e).

10. Cum $f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, rezultă că $x=\dfrac{1}{4}$ este punctul de extrem local al lui f.

Răspuns corect: a).

11. Integrala din enunţ poate fi scrisă

$$\int_7^{27}\frac{1}{x+\sqrt{2x-5}}\,dx=\int_7^{27}\frac{1}{\sqrt{2x-5}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2x-5}}+1\right)}\,dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{2x-5}=t$, rezultă că $x=\dfrac{t^2+5}{2}$ şi $\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}\,dx=dt$, iar integrala devine

$$\int_3^7\frac{1}{\dfrac{t^2+5}{2t}+1}\,dt=\int_3^7\frac{2t}{t^2+2t+5}\,dt=\int_3^7\frac{2t+2-2}{t^2+2t+5}\,dt=$$

$$=\int_3^7\frac{2t+2}{t^2+2t+5}\,dt-2\int_3^7\frac{1}{t^2+2t+5}\,dt=\ln(t^2+2t+5)\Big|_3^7-2\int_3^7\frac{1}{(t+1)^2+4}\,dt=$$

$$=\ln 68-\ln 20-\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2}\Big|_3^7=\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}4+\operatorname{arctg}2=$$

$$=\ln\frac{17}{5}-(\operatorname{arctg}4-\operatorname{arctg}2)=\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}\frac{4-2}{1+4\cdot 2}=\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}\frac{2}{9}.$$

Răspuns corect: c).

12. Cum F este primitivă a lui f, rezultă că $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu

$$-e^{-x}(a\cos 4x+b\sin 4x)+e^{-x}(-4a\sin 4x+4b\cos 4x) = e^{-x}\cos 4x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}[(-a+4b)\cos 4x - (4a+b)\sin 4x] = e^{-x}\cos 4x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+4b=1 \\ 4a+b=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{17} \\ b = \dfrac{4}{17}\ . \end{cases}$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 18.07.2020 A

1.(7p) Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{şi} \quad E_2 = |x_1 - x_2|,$$

unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - x - a^2 = 0\ , \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

a) $E_1 = -\dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$ b) $E_1 = \dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$

c) $E_1 = -\dfrac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ d) $E_1 = \dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$

e) $E_1 = \dfrac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$

2.(8p) Amestecăm un pachet de 52 de cărţi de joc şi extragem simultan două cărţi la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi aşi de aceeaşi culoare?

a) $\dfrac{1}{51 \cdot 52}$ b) $\dfrac{1}{51 \cdot 26}$ c) $\dfrac{1}{51 \cdot 13}$ d) $\dfrac{C_4^2}{52}$ e) $\dfrac{A_4^2}{52}$

3.(9p) Să se calculeze $B \cdot A \cdot C$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

4.(8p) Să se determine acele soluţii (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) $(0,1,0), \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{10}{13}\right)$ b) $(1,0,0), \left(-\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}\right)$

c) $(0,0,1), \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}\right)$ d) $(0,0,1), \left(-\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}\right)$

e) $\left(\dfrac{11}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}\right), (0,0,1)$

5.(7p) Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi şi să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

a) $e = i,\ z = -1 + i$ b) $e = 1 + i,\ z = i$ c) $e = 1,\ z = 1 - 2i$

d) $e = 1 - i,\ z = i$ e) $e = -i,\ z = 2 - i$

6.(8p) Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ atunci $\cos \frac{a}{2}$ este egal cu:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

7.(8p) Se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(-3, -4)$, $D(4, 3)$. Pe dreapta CD se alege punctul P astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanţa de la P la originea sistemului de axe de coordonate.

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

8.(9p) Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\sqrt{x}$$

şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) ∞ d) nu există e) 1

9.(10p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = -x$ d) $y = -x + 2$ e) $y = x$

10.(8p) Funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$ are:

a) un punct de minim local

b) un punct de maxim local

c) două puncte de maxim local

d) două puncte de minim local

e) un punct de minim local şi un punct de maxim local

11.(8p) Să se calculeze

$$\int (2x-1)\cos 2x dx.$$

a) $x\sin 2x+\dfrac{1}{2}(\cos 2x-\sin 2x)+\mathcal{C}$ b) $2x\cos 2x-(\cos 2x-\sin 2x)+\mathcal{C}$

c) $x\sin 2x+2(\cos 2x+\sin 2x)+\mathcal{C}$ d) $\dfrac{x}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}(\cos 2x-\sin 2x)+\mathcal{C}$

e) $x\cos 2x+(\sin 2x-\cos 2x)+\mathcal{C}$

12.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\, dx\ .$$

a) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{9}{10}\ln\dfrac{9}{10}$ b) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{10}\ln\dfrac{9}{2}$ c) $\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{9}{10}\ln\dfrac{9}{10}$

d) $\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{3}{10}\ln\dfrac{9}{2}$ e) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{10}\ln\dfrac{9}{10}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2020

1. Din relaţiile lui Viete avem că $x_1+x_2=1$ şi $x_1\cdot x_2=-a^2$ şi atunci

$$E_1=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3\cdot x_2^3}=\frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1\cdot x_2+x_2^2)}{(x_1\cdot x_2)^3}=$$

$$=\frac{(x_1+x_2)^2-3x_1\cdot x_2}{(x_1\cdot x_2)^3}=\frac{1-3(-a^2)}{(-a^2)^3}=-\frac{1+3a^2}{a^6}$$

şi

$$E_2^2=(x_1-x_2)^2=x_1^2-2x_1\cdot x_2+x_2^2=$$

$$=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=1-4(-a^2)=1+4a^2,$$

deci $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$.

Răspuns corect: c).

2. Extrăgând simultan 2 cărţi la întâmplare din pachetul de 52 de cărţi de joc, numărul cazurilor posibile este C_{52}^2. Cum cele două cărţi trebuie să fie doi aşi de aceeaşi culoare, ei pot fi 2 aşi roşii sau 2 aşi negri, deci avem 2 cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este

$$P = \frac{2}{C_{52}^2} = \frac{2}{51 \cdot 26} = \frac{1}{51 \cdot 13}.$$

Răspuns corect: c).

3.

$$B \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Răspuns corect: d).

4. Fie

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă asociată sistemului. Cum rang $A = 2 =$ rang $\overline{A} \neq 3 =$ numărul de necunoscute ale sistemului rezultă, din Teorema lui Kronecker-Capelli, că sistemul este compatibil nedeterminat cu necunoscutele principale x, y şi $z = \alpha$ necunoscută secundară. Atunci sistemul devine

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 - \alpha \\ 3x - y = 2 - 2\alpha \end{cases},$$

de unde obţinem

$$x = \frac{3 - 3\alpha}{4} \quad \text{şi} \quad y = \frac{1-\alpha}{4} \; ,$$

care înlocuite în relaţia $x^2+y^2+z^2=1$ ne conduc la ecuaţia $13\alpha^2-10\alpha-3=0$ cu soluţiile:

$$\alpha_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x=0,\ y=0,\ z=1$$

şi

$$\alpha_2 = -\frac{3}{13} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{12}{13}\ ,\ y=\frac{4}{13}\ ,\ z=-\frac{3}{13}\ .$$

Răspuns corect: c).

5. Cum legea de compoziţie din enunţ poate fi scrisă

$$x*y=(x-i)\cdot(y-i)+i,$$

elementul neutru $e=i+1$ se găseşte uşor. Pentru a determina elementul absorbant al legii, căutăm $a\in\mathbb{C}$ cu proprietatea că $x*a=a*x=a$ pentru orice $x\in\mathbb{C}$ şi obţinem $a=i$.

În concluzie, $i*i^2*i^3*i^4*i^5=i$

Răspuns corect: b).

6. Cum $\sin a=\frac{3}{5}$ şi $a\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ rezultă, din Teorema fundamentală a trigonometriei, că $\cos a=-\frac{4}{5}$, de unde se obţine că

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\ .$$

Răspuns corect: d).

7. Cum ecuaţia dreptei CD este $y=x-1$, putem considera $P(a,a-1)\in CD$, $a\in\mathbb{R}$. Dar $m(\widehat{APC})=m(\widehat{BPD})$, deci tg $(\widehat{APC})=$ tg $(\widehat{BPD})$, ceea ce este echivalent cu

$$\left|\frac{m_{AP}-m_{CD}}{1+m_{AP}\cdot m_{CD}}\right|=\left|\frac{m_{BP}-m_{CD}}{1+m_{BP}\cdot m_{CD}}\right|$$

care ne conduce la ecuaţia

$$\left|\frac{a}{3-a}\right|=1 \iff a=\frac{3}{2} \implies P\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \implies OP=\frac{\sqrt{10}}{2}\ .$$

Răspuns corect: e).

8. Având cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ în limită, înmulţim cu conjugata şi obţinem

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: a).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obţine ecuaţia $y = x$.

Răspuns corect: e).

10. Cum

$$f'(x) = \frac{x^3-1}{x},$$

rezultă că f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,1)$ şi strict crescătoare pe intervalul $(1,\infty)$, deci $x = 1$ este punct de minim local pentru f.

Răspuns corect: a).

11. Folosind formula de integrare prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned}\int(2x-1)\cos 2x dx &= \int(2x-1)\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' dx = \\ &= (2x-1)\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \int \sin 2x dx = \\ &= x\sin 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

12. Căutăm o descompunere a fracţiei de forma:

$$\frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x} = \frac{A(\sin x + 2\cos x) + B(\sin x + 2\cos x)'}{\sin x + 2\cos x} =$$
$$= \frac{A(\sin x + 2\cos x) + B(\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x} =$$
$$= \frac{(A - 2B)\sin x + (2A + B)\cos x}{\sin x + 2\cos x},$$

de unde obţinem, identificând coeficienţii, că $A = \frac{4}{5}$ şi $B = -\frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{5}\, dx - \frac{3}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 2\cos x)'}{\sin x + 2\cos x}\, dx =$$
$$= \frac{4}{5}\cdot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{5}\ln|\sin x + 2\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}.$$

Răspuns corect: d).

SESIUNEA: IULIE, DATA 19.07.2021 A

1.(7p) Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 1$, $m \in \mathbb{R}$, ştiind că punctul $A(-2, 3)$ aparţine graficului ei.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ b) $f(x) = x^2 - x - 1$

c) $f(x) = x^2 - 1$ d) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

e) $f(x) = x^2 + x - 1$

2.(8p) Să se determine în care dintre următoarele intervale se află soluţia pozitivă a ecuaţiei

$$\log_7(x^2 - x + 1) = 1 \ .$$

a) $[0,2]$ b) $(2,5)$ c) $[5,7)$ d) $[1,2)$ e) $(4,6]$

3.(8p) Fie numerele reale a şi b astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $7a + 4b$.

a) 2021 b) 0 c) 15 d) -9 e) 23

4.(7p) Se consideră matricele de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1+4m & 6m \\ -2m & 1-3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ .$$

Să se calculeze determinantul matricei $X(1)$.

a) 3 b) -2 c) -10 d) 10 e) 2

5.(8p) Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2.$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a * 1 = 6$.

a) -1 b) 2 c) $\dfrac{2}{3}$ d) 3 e) $\dfrac{3}{2}$

6.(8p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^x + 2$. Să se calculeze $f'(0)$.

a) 1 b) 3 c) 4 d) 2 e) 0

7.(8p) Să se determine distanţa dintre dreptele paralele

$$d_1 :\ 5x + 12y - 11 = 0 \quad \text{şi} \quad d_2 :\ y = mx + 2,\ m \in \mathbb{R}\ .$$

a) 1 b) 3 c) 2 d) 1 e) $\frac{3}{2}$

8.(10p) În triunghiul ABC de arie $3\sqrt{15}$, suma pătratelor lungimilor laturilor este egal cu 116. Să se calculeze $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$.

a) $\frac{58\sqrt{15}}{45}$ b) $\frac{58\sqrt{15}}{15}$ c) $\frac{29\sqrt{15}}{15}$ d) $\frac{58\sqrt{15}}{9}$ e) $\frac{29\sqrt{15}}{45}$

9.(9p) Fie funcţia $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - 2\{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a lui x. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 1 b) nu există c) 0 d) -1 e) 2

10.(9p) Se consideră punctele $A(-1,0)$ şi $B(3,0)$. Dacă C este un punct variabil pe graficul funcţiei $f : [1,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$, să se calculeze valoarea minimă pe care o poate lua aria triunghiului ABC.

a) 8 b) 4 c) $\sqrt{15}$ d) $2\sqrt{7}$ e) $2\sqrt{15}$

11.(8p) Fie funţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{şi respectiv} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ .$$

Să se determine primitiva H a funcţiei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f^2(x) \cdot g^2(x)$ care verifică relaţia $H(0) = \frac{1}{8}$.

a) $\frac{1}{8}[f(4x) - g(4x) + x]$ b) $\frac{1}{64}[f(4x) + 8x + 7]$

c) $\frac{1}{32}[g(4x) - 4x + 4]$ d) $\frac{1}{64}[g(4x) + 4x + 8]$

e) $\frac{1}{32}[f(4x) + 4x + 3]$

12.(10p) Să se calculeze

$$\int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x}{1+2e^{-x}}dx.$$

a) $2\ln(e^2-2)$ b) $\ln(e-2)\cdot\ln(e^2-2)$

c) $\ln 2\cdot\ln 3$ d) $4\ln(e^2-2)-3\ln(e-2)+e^2-e$

e) $\ln(e-2)-e^2+e$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2021

1. Punctul $A(-2,3)$ aparţine graficului funcţiei $f(x)=x^2+mx-1$ dacă $f(-2)=3$, de unde obţinem $m=0$, adică funcţia $f(x)=x^2-1$

Răspuns corect: c).

2. Ecuaţia logaritmică este echivalentă cu ecuaţia $x^2-x+1=7$ care are soluţia pozitivă $x=3\in(2,5)$.

Răspuns corect: b).

3. Ecuaţia matriceală ne conduce la urmatoarele relaţii $a+2b=-7$ şi $b=-4$, de unde $7a+4b=-9$.

Răspuns corect: d).

4. Cum

$$X(1)=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

rezultă că $\det X(1)=-10+12=2$.

Răspuns corect: e).

5. Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $3a = 2$, de unde avem că $a = \dfrac{2}{3}$.

Răspuns corect: c).

6. Cum $f'(x) = e^x + e^x \cdot x$, rezultă că $f'(0) = e^0 = 1$.

Răspuns corect: a).

7. Fie $A(0,2)$ un punct de pe dreapta d_2. Distanţa dintre cele două drepte paralele coincide cu

$$d(A, d_1) = \frac{|5x_A + 12y_A - 11|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|12 \cdot 2 - 11|}{\sqrt{169}} = 1 \ .$$

Răspuns corect: d).

8. Cum

$$A_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin A = \frac{6\sqrt{15}}{bc}$$

şi atunci

$$\text{ctg } A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\dfrac{6\sqrt{15}}{bc}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\sqrt{15}} \ .$$

Analog,

$$\text{ctg } B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\sqrt{15}} \qquad \text{şi} \qquad \text{ctg } C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{12\sqrt{15}} \ ,$$

de unde obţinem

$$\text{ctg } A + \text{ctg } B + \text{ctg } C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12\sqrt{15}} = \frac{116}{12\sqrt{15}} = \frac{29\sqrt{15}}{45} \ .$$

Răspuns corect: e).

9. Cum

$$[x] = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in [1,2) \\ 2, \text{ dacă } x \in [2,3)\ , \end{cases}$$

rezultă că

$$f(x) = (x - [x])(1 - 2x + 2[x])^2 = \begin{cases} (x-1)(3-2x)^2, \text{ dacă } x \in [1,2) \\ (x-2)(5-2x)^2, \text{ dacă } x \in [2,3) \end{cases}$$

şi atunci

$$l_s(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x-1)(3-2x)^2 = 1$$

şi

$$l_d(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)(5-2x)^2 = 0,$$

de unde deducem că nu există $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Răspuns corect: b).

10. Fie $C(a, \sqrt{8a - a^2})$, $a \in [1,5]$. Atunci, folosind intervalele de monotonie, aria $A_{\triangle ABC} = 2\sqrt{8a - a^2}$ are valoare minimă pentru $a = 1$, adică valoarea minimă pe care o poate lua aria triungiului ABC este $2\sqrt{7}$.

Răspuns corect: d).

11. Cum

$$h(x) = \frac{e^{4x} + e^{-4x} - 2}{16},$$

rezultă că

$$H(x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{64} + \mathcal{C}\ .$$

Dar $H(0) = \frac{1}{8}$, de unde obţinem că $\mathcal{C} = \frac{1}{8}$, adică

$$H(x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{64} + \frac{1}{8} = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x + 8}{64}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} - 4x + 4\right) = \frac{1}{32}[g(4x) - 4x + 4]\ .$$

Răspuns corect: c).

12.

$$\int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx = \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-\dfrac{2}{e^x}}dx = \int_1^2 \frac{x\cdot e^x - e^{2x}}{e^x-2}dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{x\cdot e^x}{e^x-2}dx - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-2}dx =$$

$$\overset{e^x=t}{=} \int_1^2 x\cdot \frac{e^x}{e^x-2}dx - \int_e^{e^2} \frac{t}{t-2}dt =$$

$$= \int_1^2 x\cdot [\ln(e^x-2)]'dx - \int_e^{e^2} \frac{t-2+2}{t-2}dt =$$

$$= x\cdot \ln(e^x-2)\Big|_1^2 - \int_1^2 \ln(e^x-2)dx - t\Big|_e^{e^2} - 2\ln|t-2|\Big|_e^{e^2} =$$

$$= \ln(e-2) - e^2 + e - \int_1^2 \ln(e^x-2)dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\ln(e^x-2)=y$, rezultă că $x=\ln(e^y+2)$, de unde $dx = \dfrac{e^y}{e^y+2}dy$ şi atunci integrala devine:

$$\int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx = \ln(e-2) - e^2 + e - \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} y\cdot \frac{e^y}{e^y+2}dy \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} y\cdot \frac{e^y}{e^y+2}dy = \ln(e-2) - e^2 + e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x\cdot e^x}{e^x+2}dx = \ln(e-2) - e^2 + e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x\cdot e^x}{e^x(1+2e^{-x})}dx = \ln(e-2)-e^2+e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x}{1+2e^{-x}}dx = \ln(e-2)-e^2+e\ .$$

Răspuns corect: e).

<u>SESIUNEA</u>: SEPTEMBRIE, <u>DATA</u> 13.09.2021 **A**

1.(7p) Graficul cărei funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de mai jos conţine punctul $A(-1,4)$?

a) $f(x)=2x^2-3x+1$ b) $f(x)=-2x^2+x+1$
c) $f(x)=3x^2-4x+1$ d) $f(x)=x^2-2x+1$
e) $f(x)=-4x^2+3x+1$

2.(8p) Să se calculeze

$$N=i+i^2+i^3+i^4\ .$$

a) $N=i$ b) $N=0$ c) $N=-1$ d) $N=1$ e) $N=-i$

3.(8p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ 2x+2y+3z=-1 \\ x-2y-z=2. \end{cases}$$

a) $(1,0,-1)$ b) $(0,1,1)$ c) $(0,-1,-1)$ d) $(1,1,0)$ e) $(1,1,1)$

4.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x}\, dx \ .$$

a) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{5}\ln\frac{4}{9}$ b) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{5}\ln\frac{4}{9}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{8}{9}$

d) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\ln\frac{1}{9}$ e) $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{5}\ln\frac{8}{9}$

5.(9p) Să se calculeze integrala

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \max\left\{\cos x, \frac{1}{2}\right\}\, dx \ .$$

a) $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$ c) $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$

6.(8p) Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Să se calculeze $B = A^2 - A$.

a) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

7.(7p) Pe mulţimea $G = [1, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2} \ .$$

Să se calculeze $N = 2 * 1$.

a) $N = 1$ b) $N = 2$ c) $N = \sqrt{3}$ d) $N = 0$ e) $N = \sqrt{5}$

8.(8p) Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln x - 1$. Să se calculeze $f'(1)$.

a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) 3

9.(9p) Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

a) $\{-1,\ 0\}$ b) $\{-2,\ 0\}$ c) $\{1,\ -1\}$

d) $\{1,\ -2\}$ e) $\{0,\ 1\}$

10.(8p) Să se calculeze

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \ .$$

a) $L = \dfrac{1}{2}$ b) $L = 1$ c) $L = \dfrac{1}{6}$ d) $L = 0$ e) $L = \dfrac{1}{3}$

11.(10p) Se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ şi $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia înălţimii dusă din A în $\triangle ABC$. Să se calculeze $S = m + n$.

a) $S = -3$ b) $S = 2$ c) $S = -1$ d) $S = 0$ e) $S = 4$

12.(8p) Să se calculeze $\sin x$, ştiind că $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2021

1. Graficul funcţiei $f(x) = x^2 - 2x + 1$ conţine punctul $A(-1, 4)$, pentru că $f(-1) = 4$.

Răspuns corect: d).

2. $N = i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$.

Răspuns corect: b).

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x = 1$, $y = 0$ şi $z = -1$.

Răspuns corect: a).

4. Căutăm o descompunere a fracţiei de forma:

$$\frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x} = \frac{A(2\sin x + \cos x) + B(2\sin x + \cos x)'}{2\sin x + \cos x} =$$
$$= \frac{A(2\sin x + \cos x) + B(2\cos x - \sin x)}{2\sin x + \cos x} =$$
$$= \frac{(2A - B)\sin x + (A + 2B)\cos x}{2\sin x + \cos x},$$

de unde obţinem, identificând coeficienţii, că $A = \frac{4}{5}$ şi $B = \frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{5}\, dx + \frac{3}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin x + \cos x)'}{2\sin x + \cos x}\, dx =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{5}\ln|2\sin x + \cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{8}{9}.$$

Răspuns corect: c).

5. Cum $\cos x = \dfrac{1}{2}$ pentru $x = \dfrac{\pi}{3}$, integrala din enunţ devine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\left\{\cos x, \frac{1}{2}\right\}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Răspuns corect: d).

6.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2\ .$$

Răspuns corect: a).

7. $N = 2 * 1 = \sqrt{2^2 \cdot 1^2 - 2^2 - 1^2 + 2} = \sqrt{4 - 4 - 1 + 2} = 1$.

Răspuns corect: a).

8. Cum $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$, rezultă că $f'(1) = 2 + 1 = 3$.

Răspuns corect: e).

9. Cum $f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x)$ se anulează în -2 şi 0, folosind monotonia funcţiei deducem că mulţimea punctelor de extrem local este $\{-2; 0\}$.

Răspuns corect: b).

10. Aplicând Regula lui l´ Hospital de 2 ori se obţine

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} .$$

Răspuns corect: c).

11. Cum panta dreptei BC este 1, rezultă că panta înălţimii din A este -1 şi atunci ecuaţia ei este $y = -x + 5$, de unde $m = -1$ şi $n = 5$, deci $m + n = 4$.

Răspuns corect: e).

12. Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\sin^2 x = \frac{2}{3}$. Ţinand cont de intervalul dat se obţine $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: e).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 14.07.2022 **A**

1.(8p) Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 m în 10 bucăţi, fiecare bucată fiind cu 6 cm mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai lungă bucată?

a) 61 cm b) 67 cm c) 70 cm d) 73 cm e) 79 cm

2.(8p) Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obţinem suma punctelor 5?

a) $\dfrac{1}{108}$ b) $\dfrac{1}{72}$ c) $\dfrac{1}{36}$ d) $\dfrac{1}{12}$ e) $\dfrac{1}{6}$

3.(8p) Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2022 \end{pmatrix}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5

4.(9p) Să se determine numărul matricelor $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care satisfac condiţiile

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şi $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) o infinitate

5.(8p) Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$z_1 \perp z_2 = z_1 \cdot z_2 + Im(z_1) \cdot Im(z_2),$$

unde pentru $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b = Im(z)$. Să se determine modulul simetricului elementului $z = 2 + i$ în raport cu această lege.

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) 1 e) $2\sqrt{5}$

6.(8p) Să se calculeze $\sin(2x)$, ştiind că $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ şi $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) -1

7.(7p) Se dau punctele $A(2,3)$, $B(-1,2)$ şi $C(3,6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia medianei duse din A în triunghiului ABC. Să se calculeze $m + n$.

a) -6 b) -4 c) 0 d) 4 e) 6

8.(9p) Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - 2022x \ .$$

a) $y = -2023x + \frac{1}{2}$ b) $y = -2023x - \frac{1}{2}$ c) $y = -2021x - 2$

d) $y = -2021x$ e) $y = -2022x$

9.(7p) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^2 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

a) $y = 5x - 9$ b) $y = 6x - 10$ c) $y = -6x + 2$

d) $y = 6x - 2$ e) $y = 4x - 8$

10.(10p) Să se determine mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(1 - mx)e^x \leq 1 \ ,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $\varnothing$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{2\}$ e) $\{-1\}$

11.(9p) Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos(2x) \ dx \ .$$

a) -1 b) $-\dfrac{1}{2}$ c) 0 d) $\dfrac{\pi}{2}$ e) $\dfrac{\pi-1}{2}$

12.(9p) Să se calculeze

$$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx \ .$$

a) $\dfrac{40}{3}$ b) $\dfrac{10}{9}$ c) $\dfrac{20}{3}$ d) $\dfrac{10}{3}$ e) $\dfrac{40}{9}$

SOLUŢII AC Iulie 2022

1. Observăm că lungimile celor 10 bucăţi reprezintă primii zece termeni ai progresiei aritmetice $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n, \ldots$ de raţie $r = 6\ cm$ şi suma $S_{10} = 4\ m = 400\ cm$. Obţinem că $a_1 = 13\ cm$ şi $a_{10} = 67\ cm$.

Deci, cea mai lungă bucată are $67\ cm$.

Răspuns corect: b).

2. Cum la aruncarea a trei zaruri numărul cazurilor posibile este 6^3 şi în doar şase dintre ele suma punctelor este 5, adică în cazurile:

$$(1,1,3),\ (1,3,1),\ (3,1,1),\ (1,2,2),\ (2,1,2),\ (2,2,1)\ ,$$

rezultă că probabilitatea cerută este $\dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{36}$.

Răspuns corect: c).

3. Deoarece determinantul de ordinul 3

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 2022 \end{vmatrix}$$

este nenul, rezultă că rang $A = 3$.

Răspuns corect: d).

4. Din ecuaţia matriceală din enunţ obţinem sistemul

$$\begin{cases} 3a + c = a + b \\ 3b + d = a + b \\ a + 3c = c + d \\ b + 3d = c + d \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b + d = 0 \\ a + 2c - d = 0 \\ b - c + 2d = 0 \end{cases}$$

care are matricea asociată

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

cu $\det A = 0$ şi

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

nenul, deci $\mathrm{rang} A = 3$. Cum sistemul este omogen, rezultă că el este compatibil nedeterminat cu a, b, c necunoscute principale şi d necunoscută secundară, primele trei ecuaţii sunt principale şi ultima e secundară, deci avem sistemul

$$\begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b = -d \\ a + 2c = d \end{cases}$$

cu soluţia $a = -d$, $b = -d$ şi $c = d$, care înlocuită în relaţia $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022$, ne conduce la $d = \pm\sqrt{\dfrac{2022}{4}}$, adică două matrice.

Răspuns corect: c).

5. Cum elementul neutru al legii de compoziţie date este 1, simetricul lui $z = 2 + i$ îl găsim rezolvând ecuaţia $z \perp z' = 1$, de unde rezultă $z' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$ cu modulul $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Răspuns corect: a).

6. Din Formula fundamentală a trigonometriei obţinem că $\cos^2 x = \frac{1}{2}$. Dar $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, de unde rezultă că $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi atunci $\sin 2x = -1$.

Răspuns corect: e).

7. Dacă M este mijlocul segmentului BC atunci $M(1, 4)$ şi ecuaţia lui AM este $y = -x + 5$, deci $m = -1$ şi $n = 5$, adică $m + n = 4$.

Răspuns corect: d).

8. Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, rezultă că f nu are asimptotă orizontală la $-\infty$, deci căutăm asimptotă oblică la $-\infty$. Avem

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 2022x}{x} =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2022\right)}{x} = -2023$$

şi

$$n = \lim_{x \to -\infty} [f(x) + 2023x] = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x) =$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1}{2},$$

deci $y = -2023x + \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: a).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 6$, se obţine $y = 6x - 10$.

Răspuns corect: b).

10. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - mx)e^x$. Cum $f(0) = 1$, rezultă că $f(x) \leq f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $x = 0$ este punct de maxim local pentru f. Cum f este derivabilă în $x = 0$, rezultă conform teoremei lui Fermat, că $f'(0) = 0$.

Dar $f'(x) = -me^x + (1 - mx)e^x$ cu $f'(0) = -m + 1$, de unde se obţine $m = 1$ care satisface condiţia problemei.

Răspuns corect: c).

11. Folosind formula de integrare prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' dx = \\ &= (2x-1)\cdot\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \\ &= (\pi - 1)\cdot\frac{\sin\pi}{2} + \frac{\sin 0}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1.\end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

12. Folosind formula de integrare prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx &= \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\cdot x^3 dx = \frac{2}{3}\int_0^2 (\sqrt{1+x^3})'\cdot x^3 dx = \\ &= \frac{2}{3}\left(x^3\sqrt{1+x^3}\Big|_0^2 - \int_0^2 3x^2\sqrt{1+x^3}\ dx\right) \underset{3x^2dx=dt}{\overset{1+x^3=t}{=}} \\ &= \frac{2}{3}\left(24 - \int_1^9 \sqrt{t}\ dt\right) = \frac{2}{3}\left(24 - \frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_1^9\right) = \frac{40}{9}\ .\end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: IULIE, DATA 17.07.2023 A

1.(7p) Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ şi $g(x) = 3x - 1$. Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei $(f \circ g)(x) = 0$.

a) 0 b) 1 c) -1 d) 9 e) -9

2.(8p) Fie numărul complex z care verifică ecuaţia

$$\bar{z} + |z| = 2 + 8i.$$

Să se determine $|z|$.

a) 289 b) 15 c) 8 d) 23 e) 17

3.(9p) La o şedintă cu părinţii participă şapte doamne şi opt domni, printre care doamna X şi domnul Y. În câte moduri se poate forma un comitet de trei doamne şi patru domni, ştiind că doamna X refuză să fie desemnată împreună cu domnul Y?

a) 277200 b) 1925 c) 525 d) 2450 e) 5040

4.(10p) Fie (x_0, y_0, z_0) o soluţie nebanală a sistemului liniar omogen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Să se determine valoarea raportului

$$\frac{x_0y_0 + x_0z_0 + y_0z_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

a) $\frac{37}{75}$ b) $-\frac{47}{75}$ c) 0 d) $-\frac{37}{75}$ e) $\frac{47}{75}$

5.(8p) Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 5

6.(7p) Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

a) $(X+\widehat{4})^2(X^2+X+\widehat{1})$ b) $(X+\widehat{4})(X+\widehat{2})(X^2+\widehat{1})$

c) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})(X^2+\widehat{1})$ d) $(X+\widehat{2})^2(X^2+X+\widehat{1})$

e) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{4})(X^2+X+\widehat{1})$

7.(8p) Fie vectorii $\vec{u} = \vec{i} + (a+1)\vec{j}, \vec{v} = -b\vec{i} + 4\vec{j}, \vec{w} = (2a+4)\vec{i} - 4b\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, să se calculeze $a + b$.

a) -2 b) 2 c) 0 d) -1 e) 1

8.(9p) Să se calculeze diatanţa de la $O(0,0)$ la simetricul punctului $A(4,2)$ faţă de punctul $B(-1,1)$.

a) $2\sqrt{5}$ b) 2 c) $3\sqrt{10}$ d) $\sqrt{2}$ e) 6

9.(8p) Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei

$$f : (-\infty, -2) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{4x^2+1} - \sqrt{x^2+2x}.$$

a) $y = -x - 1$ b) $y = x - 1$ c) $y = x + 1$

d) $y = 1 - x$ e) $y = -x$

10.(8p) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = x + 2\sqrt{x}$$

în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

a) $y = 5x - 2$ b) $y = 3x$ c) $y = 2x + 1$

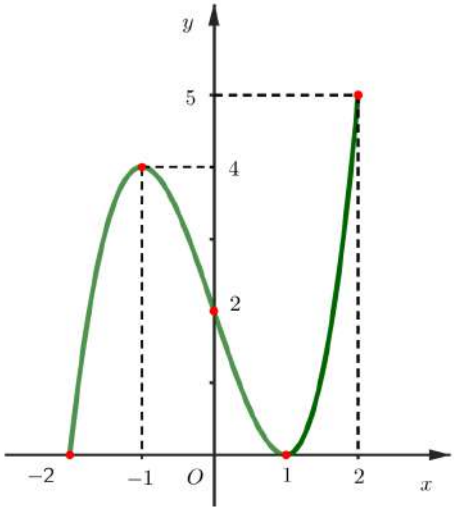
d) $y = 3x + 2$ e) $y = 5 - 2x$

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_0^1 (x^2 - x) \cdot e^{-2x}\, dx.$$

a) $\frac{1}{2e^2}$ b) $\frac{1}{e^2} + 1$ c) $-\frac{1}{6e^2}$ d) $-\frac{1}{2e^2}$ e) $-\frac{1}{e^2} - 1$

12.(10p) Graficul unei primitive F a unei funcţii continue $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ este dat în figura de mai jos. Câte dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate?



(i) $F'(1) = f(1)$ (ii) $f(1) = F(1)$ (iii) $\int\limits_0^2 f(x)dx = 3$

(iv) $\int\limits_{-1}^0 f(x) \cdot F(x)\, dx = -6$ (v) $f(x) \leq 0, \forall x \in (-1, 1)$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

SOLUŢII AC Iulie 2023

1. Avem $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - g(x) = 9x^2 - 9x + 2$. Atunci suma soluţiilor ecuaţiei $9x^2 - 9x + 2 = 0$ este $x_1 + x_2 = 1$.

Răspuns corect: b).

2. Notăm $z = a + ib$, de unde $\bar{z} = a - ib$ şi $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ecuaţia devine

$$a - ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i.$$

Prin identificarea părţilor reale, respectiv imaginare obţinem sistemul

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

Rezultă $\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a$ cu $2 - a \geq 0$. Prin ridicare la pătrat găsim $a = -15$ şi în final $|z| = 17$.

Răspuns corect: e).

3. Dintr-un grup de n persoane se pot alege k persoane în C_n^k moduri. Atunci, fără restricţii, ar fi C_7^3 moduri de a alege doamnele şi C_8^4 moduri de a alege domnii. Conform "regulii produsului", avem $C_7^3 \cdot C_8^4$ moduri de a forma comitetul respectiv (fără restricţii). Din acest număr vom scădea cazurile "nefavorabile", adică cele în care doamna X şi domnul Y fac parte din comitet: $C_6^2 \cdot C_7^3$ (deoarece mai rămân de ales două doamne din şase şi trei domni din restul de şapte). Rezultă 1925 de moduri.

Răspuns corect: b).

4. Notăm $z = z_0$. Atunci sistemul dat devine

$$\begin{cases} x + 2y = -z_0 \\ x - 3y = -2z_0 \end{cases}.$$

Reducem pe x şi găsim $y_0 = \dfrac{z_0}{5}$, apoi $x_0 = -\dfrac{7z_0}{5}$, ce verifică ecuaţia nefolosită. Prin înlocuirea în expresie obţinem $-\dfrac{37}{75}$.

Răspuns corect: d).

5. Minorul de ordinul 3 format din primele două coloane şi ultima coloană este nenul, deci rangul matricei este 3.

Răspuns corect: c).

6. Folosind schema lui Horner, verificăm dacă elementele lui $\mathbb{Z}_5$ sunt rădăcini ale polinomului dat. Găsim că doar $\hat{1}$ şi $\hat{3}$ sunt rădăcini. Mai mult, rezultă descompunerea

$$f = (X - \hat{1})(X - \hat{3})(X^2 + X + 1) = (X + \hat{4})(X + \hat{2})(X^2 + X + 1),$$

unde $X^2 + X + 1$ este ireductibil deoarece este polinom de gradul doi fără rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

Răspuns corect: e).

7. Avem

$$\vec{u} + \vec{v} = (1 - b)\vec{i} + (a + 5)\vec{j}.$$

Prin identificarea cu coordonatele lui $\vec{w}$ obţinem condiţiile

$$1 - b = 2a + 4, \ \ a + 5 = -4b.$$

Rezultă $a = -1, b = -2$, deci $a + b = -2$.

Răspuns corect: a).

8. Folosind formula mijlocului unui segment obţinem că simetricul lui A faţă de B este punctul $C(-6, 0)$. Atunci $OC = 6$.

Răspuns corect: e).

9. Folosind că $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ pentru $x < 0$, avem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x\left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right) = \infty(2 - 1) = \infty,$$

deci nu există asimptotă orizontală spre $-\infty$.

Căutăm asimptota oblică $y = mx + n$, unde

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}{x} = -1, \\
n &= \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{x^2+2x} + x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right) - \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} + x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1} - 2x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} - x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x\left(\sqrt{4+1/x^2} + 2\right)} - \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x\left(\sqrt{1+2/x} + 1\right)} \\
&= 0 + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Rezultă $y = -x + 1$.

Răspuns corect: d).

10. Avem $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Panta tangentei este $m = f'(1) = 2$. Cum $f(1) = 3$, ecuaţia tangentei va fi $y - 3 = 2(x - 1)$, adică $y = 2x + 1$.

Răspuns corect: c).

11. Folosim de două ori formula de integrare prin părţi cu

$$\int e^{-2x}\,dx = \frac{e^{-2x}}{-2}, \text{ adică } e^{-2x} = -\frac{1}{2}(e^{-2x})'$$

Avem

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^2 - x)\cdot e^{-2x}\,dx &= (x^2 - x)\frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x-1)\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx \\
&= 0 + \frac{1}{2}\left((2x-1)\frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^1 - \int_0^1 2\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2}}{-2} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{-2}\Big|_0^1\right) = -\frac{1}{2e^2}.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

12. Avem:
(i) Adevărat din definiţia primitivei.
(ii) $x = 1$ este punct de minim al funcţiei derivabile F. Din Teorema lui Fermat rezultă că $F'(1) = 0$, deci $f(1) = 0$. Mai mult, din grafic, $F(1) = 0$. Deci adevărat.
(iii) $\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 5 - 2 = 3$, deci adevărat.
(iv) $\int_{-1}^0 f(x) \cdot F(x)\,dx = \int_{-1}^0 F'(x) \cdot F(x)\,dx = \frac{1}{2}F^2(x)|_{-1}^0 = \frac{1}{2}(2^2 - 4^2) = -6$; adevărat.
(v) Pe intervalul $(-1, 1)$ funcţia F este descrescătoare, deci $F'(x) \leq 0$, adică $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Astfel şi ultima afirmaţie este adevărată.

Răspuns corect: e).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 22.07.2024 A

1.(8p) O parabolă $y = x^2 + bx + c$ are vârful în punctul de coordonate $(-1, 2)$. Calculaţi $b + c$.

a) 0 b) 1 c) 5 d) 2 e) 3

2.(8p) Dacă numărul complex z satisface relaţia

$$|z - i|^2 + |z - 2i|^2 = |z - 3i|^2,$$

atunci $|z|$ este egal cu

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

3.(8p) Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Dacă $A^{-1} = \alpha A + \beta I_2$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar I_2 este matricea unitate, atunci valoarea raportului $\frac{\beta}{\alpha}$ este

a) 6 b) -6 c) $\frac{1}{6}$ d) $-\frac{1}{6}$ e) 0

4.(10p) Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{cases}.$$

Care dintre următoarele relaţii este verificată de toate soluţiile sistemului?

a) $2x^2 - y^2 - z^2 - 4z = 2$ b) $x + y + z = 1$
c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ d) $x + y^2 - z^2 = 1$
e) $x^2 + y + z^2 = 4z + 1$

5.(8p) Fie polinoamele $f = X^3 + 2X^2 - X - 5$ şi $g = X^2 + 1$. Determinaţi câtul c şi restul r ale împărţirii lui f la g.

a) $c = X + 2$, $r = 0$ b) $c = X^2 + 1$, $r = X + 2$
c) $c = X + 2$, $r = -2X - 7$ d) $c = -2X - 7$, $r = X + 2$
e) $c = X + 1$, $r = -2$

6.(8p) Calculaţi perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $M(1, 1)$, $N(5, -1)$, $P(3, 5)$ sunt mijloacele laturilor sale.

a) $4\sqrt{5}$ b) $12\sqrt{5}$ c) $8\sqrt{5} + 4\sqrt{10}$
e) $8\sqrt{5} + 12$ f) $6\sqrt{5} + 14$

7.(9p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} + 2x + 3$. Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x + 6$ b) $y = x - 6$ c) $y = 3x + 4$

d) $y = x + 4$ e) $y = 3x - 6$

8.(7p) Calculaţi limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^1 + nC_n^2 + n^2C_n^3 + \cdots + n^{n-1}C_n^n}{C_{n-1}^0 + (n-1)C_{n-1}^1 + (n-1)^2C_{n-1}^2 + \cdots + (n-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}}.$$

a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) e e) ∞

9.(9p) Determinaţi mulţimea valorilor parametrului real m pentru care ecuaţia $e^{x^2} - mx = 0$ are două soluţii reale şi distincte.

a) $\varnothing$ b) $(-\sqrt{2e}, \sqrt{2e})$ c) $(-\infty, 0)$

d) $[-\sqrt{2e}, \sqrt{2e}]$ e) $(-\infty, -\sqrt{2e}) \cup (\sqrt{2e}, \infty)$

10.(8p) Calculaţi $\displaystyle\int_1^e (2x+1)\ln x \, dx$.

a) $\dfrac{e^2+3}{2}$ b) $\dfrac{e+3}{2}$ c) $\dfrac{e^2-2}{2}$ d) $\dfrac{e^2+1}{2}$ e) $\dfrac{e+1}{2}$

11.(7p) Determinaţi valorile parametrilor reali a, b, c pentru care funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = ax + (bx^2 + c)\operatorname{arctg} x$ este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

a) $a = -\dfrac{1}{2}, b = c = \dfrac{1}{2}$ b) $a = b = \dfrac{1}{2}, c = -\dfrac{1}{2}$ c) $a = b = c = -\dfrac{1}{2}$

d) $a = b = c = \dfrac{1}{2}$ e) $a = c = \dfrac{1}{2}, b = -\dfrac{1}{2}$

12.(10p) Câte numere de 7 cifre conţin exact o cifră de 1, exact două cifre de 2 şi exact trei cifre de 3 ?

a) 420 b) 2880 c) 2940 d) 3780 e) 20160

SOLUŢII AC Iulie 2024

1. Parabola dată este graficul funcţiei de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + bx + c$.

Avem $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{b}{2} = -1$, deci $b = 2$. Apoi $f(-1) = 1 - b + c = 2$, de unde $c = 3$. Rezultă $b + c = 5$.

Răspuns corect: c).

2. Notăm $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, deci $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Calculând modulele, relaţia dată în enunţ devine

$$a^2 + (b-1)^2 + a^2 + (b-2)^2 = a^2 + (b-3)^3.$$

Rezultă $a^2 + b^2 = 4$, deci $|z| = 2$.

Răspuns corect: b).

3. Avem $tr(A) = 6$ şi $det(A) = 8$. Atunci relaţia Cayley-Hamilton devine $A^2 = 6A - 8I_2$. Înmulţim cu A^{-1} şi avem $A = 6I_2 - 8A^{-1}$, de unde

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}A + \frac{6}{8}I_2.$$

Astfel $\alpha = -\dfrac{1}{8}$ şi $\beta = \dfrac{6}{8}$, iar $\dfrac{\beta}{\alpha} = -6$.

Răspuns corect: b).

4. Notăm $z = t$. Atunci sistemul dat devine

$$\begin{cases} x + 4y = 1 - 3t \\ 2x - y = 2 + 3t \\ 3x + 2y = 3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 8y = -2 + 6t \\ 2x - y = 2 + 3t \\ 3x + 2y = 3 + t \end{cases}$$

Reducem pe x din primele două ecuaţii şi găsim $y = -t$, apoi $x = 1 + t$. Ultima ecuaţie devine $3 + t = 3 + t$, deci sistemul are o infinitate de soluţii $(x, y, z) = (1 + t, -t, t), t \in \mathbb{R}$. Prin înlocuirea în expresiile date, obţinem că soluţiile găsite verifică relaţia de la a).

Răspuns corect: a).

5. Efectuăm împărţirea ca mai jos şi obţinem câtul $X + 2$ şi restul $-2X - 7$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +2X^2 & -X & -5 & X^2+1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & & -X & & X+2 \\ \cline{1-3}
 & 2X^2 & -2X & -5 & \\
 & -2X^2 & & -2 & \\ \cline{2-4}
 & & -2X & -7 &
\end{array}$$

Răspuns corect: c).

6. Deoarece punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului, MN, NP, PM sunt linii mijlocii. Atunci perimetrul triunghiului ABC este dublul perimetrului triunghiului MNP. Folosim formula distanţei dintre două puncte şi obţinem $MN = 2\sqrt{5}, NP = 2\sqrt{10}, PM = 2\sqrt{5}$.

Răspuns corect: c).

7. Avem $f'(x) = -e^{-x} + 2$. Panta tangentei este $m = f'(0) = 1$. Cum $f(0) = 4$, ecuaţia tangentei va fi $y - 4 = 1(x - 0)$, adică $y = x + 4$.

Răspuns corect: d).

8. Folosim binomul lui Newton. Avem

$$\begin{aligned}(1+n)^n &= 1 + C_n^1 n + C_n^2 n^2 + \cdots + C_n^n n^n \\ &= 1 + n(C_n^1 + nC_n^2 + n^2 C_n^3 + \cdots + n^{n-1} C_n^n),\end{aligned}$$

adică la numărătorul limitei avem $\frac{(1+n)^n - 1}{n}$. La numitor este exact dezvoltarea $[1 + (n-1)]^{n-1} = n^{n-1}$, deci limita devine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^n - 1}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n^n} \right) = e - 0 = e.$$

Răspuns corect: d).

9. Observăm că $x = 0$ nu este soluţie a ecuaţiei şi împărţim la x. Ecuaţia devine $\frac{e^{x^2}}{x} - m = 0$. Vom folosi şirul lui Rolle pentru ecuaţiile $f(x) = 0$ şi $g(x) = 0$, unde

$$f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{x^2}}{x} - m,$$

respectiv

$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{e^{x^2}}{x} - m.$$

Avem

$$f'(x) = g'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1)}{x^2},$$

care egalat cu 0 dă soluţiile $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ şi $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mai mult,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, f(x_1) = -\sqrt{2e} - m, \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \infty, g(x_2) = \sqrt{2e} - m, \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Rezultă şirul lui Rolle pentru $f(x) = 0$:

$$-, semn(-\sqrt{2e} - m), -,$$

respectiv şirul lui Rolle pentru $g(x) = 0$:

$$+, semn(\sqrt{2e} - m), +.$$

Deducem că ecuaţia dată are exact două soluţii reale şi disticte dacă şi numai dacă $(-\sqrt{2e} - m)(\sqrt{2e} - m) > 0$.

Răspuns corect: e).

10. Folosim formula de integrare prin părţi:

$$\begin{aligned}
\int_1^e (2x+1)\cdot \ln x \, dx &= \int_1^e (x^2+x)' \cdot \ln x \, dx \\
&= (x^2+x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (x^2+x)\frac{1}{x}\, dx \\
&= (e^2+e)\ln e - (1^2+1)\ln 1 - \int_1^e (x+1)\, dx \\
&= e^2+e-0-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_1^e = e^2+e-\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}+1 \\
&= \frac{e^2+3}{2}.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

11. Funcţia F este derivabilă. Pentru a fi primitiva lui f mai trebuie ca $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică

$$a + b + 2bx \operatorname{arctg} x + \frac{c-b}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă condiţiile $c - b = 0, 2b = 1, a + b = 0$, de unde $b = c = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$.

Răspuns corect: a).

12. Observăm că exact o cifră a unui număr cu proprietatea din enunţ nu este 1,2 sau 3. Reformulăm problema astfel: ”Câte numere de 7 cifre conţin exact o cifră de 1, exact două cifre de 2, exact trei cifre de 3 şi exact încă o cifră din mulţimea $M = \{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?”

Atunci există $C_7^1 \cdot C_6^2 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 = 420$ modalităţi pentru fiecare alegere a cifrei din mulţimea M, adică $420 \cdot 7 = 2940$ aranjări de cifre cu proprietatea cerută, dintre care $C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 = 60$ încep cu 0. Rezultă că vor fi $2940 - 60 = 2880$ numere.

Răspuns corect: b).

Bibliografie

[1] T. Bânzaru, N. Boja, O. Lipovan, A. Kovacs, G. Babescu, P. Găvruţa, D. Rendi, I. Mihuţ, D. Dăianu, D. Păunescu, C. Milici, R. Anghelescu, *Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat si admiterea în învaţământul superior*, Editura Politehnica, 2010.

[2] Gh. Cenuşă, V. Burlacu, M. Covrig, B. Iftime, I. Mircea, C. Raischi, R. Şerban, O. Vegheş, *Admitere ASE Bucureşti, Teste grilă şi autoevaluare*, 2005-2008, Editura Cison, Bucureşti.

[3] P. Găvruţa, I. Goleţ, D. Păunescu, C. Arieşanu, C. Lăzureanu, A. Gîrban, L. Cădariu, G. Ţigan, A. Juratoni, C. Hedrea, O. Bundău, C. Petrişor, *Culegere de probleme pentru examenul de bacalaureat şi admiterea în Universitatea Politehnica Timişoara*, Editura Politehnica Timişoara, 2013.

[4] Gh. Gussi, O. Stănăşilă, T. Stoica, *Matematică, Elemente de Analiză Matematică*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, R.A. Bucureşti, 1994.

[5] D. V. Ionescu, *Complemente de Matematici pentru liceu*, Editura Didatică şi Pedagogică, 1978.

[6] C. Ionescu-Ţiu, L. Pîrşan *Calcul diferenţial şi integral pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, Bucureşti, 1975.

[7] C. P. Nicolescu, *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, 1984.

[8] C. P. Nicolescu, *Analiză matematică. Aplicaţii*, Editura Albatros, 1987.

[9] I. Petrică, E. Constantinescu, D. Petre, *Probleme de Analiză Matematică*, Vol. 1 (clasa XI), Editura Petrion, 1993.

[10] V. Radu, *Teme şi probleme de matematică pentru Concursul "Traian Lalescu"*, caiete de studiu - clasa a XI-a, Editura Mirton, 1999.

[11] *Gazeta Matematică.*

[12] *Manuale alternative de Matematică aprobate de Ministerul Educaţiei Naţionale.*

[13] *Probleme date la olimpiade şi concursuri de matematică.*

[14] *Variante Bacalaureat Matematică emise de Ministerul Educaţiei Naţionale.*

ISBN 978-606-35-0624-6